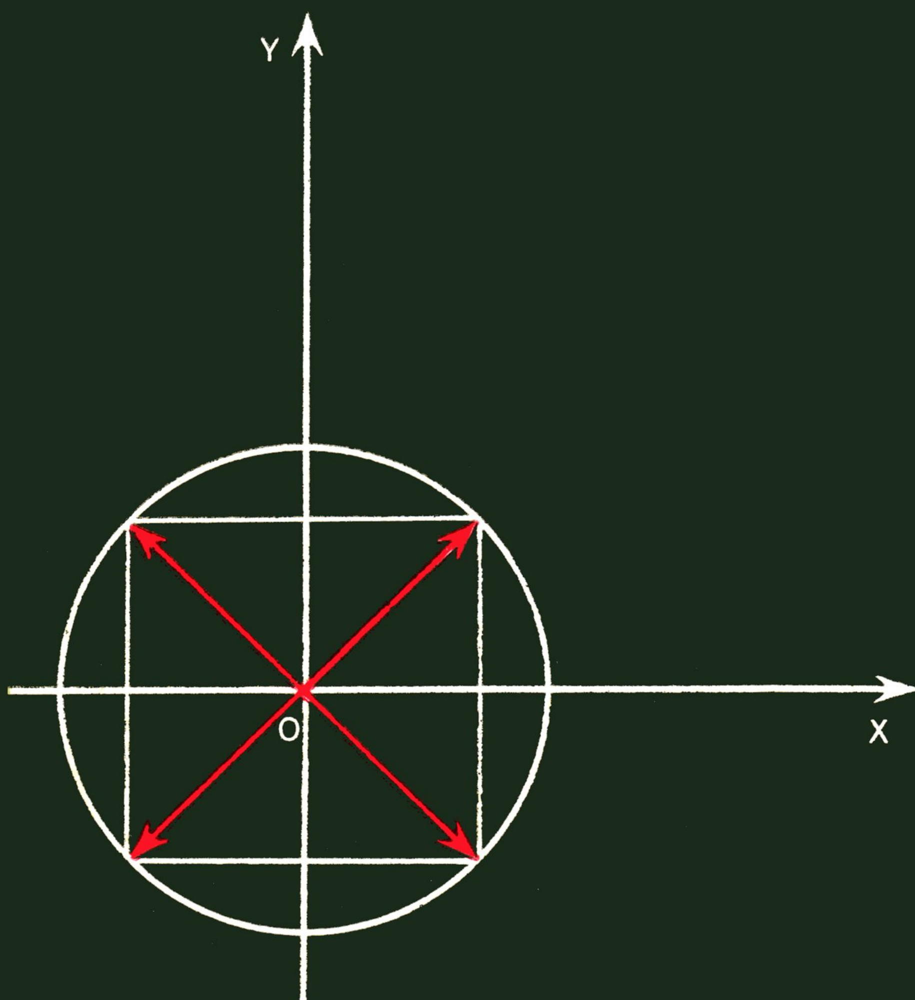
MATEMATIKA TECHNIKUMAMS

algebra ir analizės pradmenys

2 DALIS



MATEMATIKA TECHNIKUMAMS

algebra ir analizės pradmenys
2 DALIS

TSRS aukštojo ir specialiojo vidurinio mokslo ministerijos patvirtintas vadovėlis specialiosioms vidurinėms mokykloms



VILNIUS
„MOKSLAS"
1980

УДК 512.8

Autorių **kolektyvas:**

M. Kačenovskis, J. Koliaginas, A. Kutasovas, G. Lukankinas, V. Oganesianas, G. Jakovlevas

Rusiško leidimo redaktorius G. *Jakovlevas*

Vertė *E. Misevičius*

1702000000

A $\frac{\textbf{20203—018}}{\textbf{M 854(08)—80}}$ 43—80

TURINYS

PRATARMĖ

Ši knyga yra „Algebros ir analizės pradmenų" vadovėlio antroji dalis. Vadovėlis parašytas, vadovaujantis naująja specialiųjų vidurinių mokyklų matematikos programa.

Čia dėstoma tiesinių lygčių sistemų, antrosios, trečiosios eilės determinantų ir kompleksinių skaičių teorija, paprasčiausi integravimo metodai, tap pat kombinatorikos ir tikimybių teorijos elementai. Daug dėmesio skiriama integralų taikymui, sprendžiant konkrečius fizikos uždavinius.

„Diferencialinių lygčių" skyriuje nagrinėjamos paprasčiausios pirmosios ir antrosios eilės diferencialinės lygtys, gvildenami bakterijų dauginimosi, radioaktyviojo skilimo ir harmoninių svyravimų uždaviniai. Paskutiniajame skyriuje nagrinėjamos skaičių ir laipsnių eilutės, kurių nariai yra ir realieji, ir kompleksiniai skaičiai.

Teorija gausiai iliustruota konkrečiais uždaviniais ir pavyzdžiais. Kiekviename skyriuje yra uždavinių mokiniams savarankiškai spręsti.

Autoriai nuoširdžiai dėkoja TSRS Pedagogikos mokslų akademijos nariui korespondentui prof. I. Brovikovui, doc. P. Apanasovui ir TSRS aukštojo ir specialiojo vidurinio mokslo ministerijos metodistui P. Samoilenkai, atidžiai perskaičiusiems rankraštį ir davusiems vertingų pastabų.

Autoriai

I SKYRIUS

Determinantai ir tiesinių lygčių sistemos

§ 1. DVIEJŲ TIESINIŲ LYGČIŲ SU DVIEM NEŽINOMAISIAIS SISTEMOS

1. Priminsime, kad *tiesine lygtimi* vadinama lygtis

$$ax+by=c,$$

kurioje a, b, c — duoti skaičiai, o x, y — ieškomi nežinomieji. Skaičiai a, b vadinami *lygties koeficientais*, o skaičius c — *dešiniąja lygties puse*, arba *laisvuoju nariu*.

Nagrinėsime dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases} \tag{1}$$

Jeigu visi (1) sistemos lygčių koeficientai ir laisvieji nariai lygūs nuliui, tai bet kuri skaičių pora $(x; y)$ yra sistemos sprendinys. Jeigu visi sistemos lygčių koeficientai yra lygūs nuliui, o laisvieji nariai ne visi lygūs nuliui, tai (1) sistema sprendinių neturi.

Toliau nagrinėsime tik sistemas, kuriose bent vienas kurios nors lygties koeficientas nelygus nuliui.

Sakykime, $b_2 \neq 0$. Tada (1) sistema yra ekvivalenti (lygiavertė) sistemai

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ \frac{a_2}{b_2} x + y = \frac{c_2}{b_2}; \end{cases} \tag{2}$$

vadinasi, jeigu skaičių pora $(x_0; y_0)$ yra (1) sistemos sprendinys, tai ji yra ir (2) sistemos sprendinys ir atvirkščiai.

Antrąją (2) sistemos lygtį padauginsime iš b_1 ir gautąją lygtį panariui atimsime iš pirmosios:

$$\left(a_1 - \frac{a_2}{b_2} b_1\right) x = c_1 - \frac{c_2}{b_2} b_1. \tag{3}$$

Pakeitę (2) sistemos pirmąją lygtį (3) lygtimi, gausime sistemą

$$\begin{cases} \left(a_1 - \frac{a_2}{b_2} b_1\right) x = c_1 - \frac{c_2}{b_2} b_1, \\ \frac{a_2}{b_2} x + y = \frac{c_2}{b_2}, \end{cases} \quad (4)$$

kuri yra ekvivalenti (2) sistemai.

Jeigu $a_1 - \frac{a_2}{b_2} b_1 \neq 0$, t.y. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, tai iš pirmosios lygties

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (5)$$

Įrašę tą x reikšmę į (4) sistemos antrąją lygtį, gausime

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (6)$$

Paprastumo dėlei žymėsime

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta,$$
$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = \Delta_x,$$
$$a_1 c_2 - a_2 c_1 = \Delta_y;$$

tada (5) ir (6) formules galėsime užrašyti šitaip:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Jos vadinamos *Kramerio formulėmis.*

Taigi (4) sistema turi vienintelį sprendinį, apibrėžtą (5) ir (6) formulėmis, jeigu tik $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Kadangi (4) sistema yra ekvivalenti (1) sistemai, tai (4) sistemos sprendinys yra ir (1) sistemos sprendinys.

Sakykime,

$$a_1 - \frac{a_2}{b_2} b_1 = 0. \quad (7)$$

Tada (4) sistema atrodo šitaip:

$$\begin{cases} 0 \cdot x = c_1 - \frac{c_2}{b_2} b_1, \\ \frac{a_2}{b_2} x + y = \frac{c_2}{b_2}. \end{cases} \quad (8)$$

Jeigu

$$c_1 - \frac{c_2}{b_2} b_1 \neq 0,$$

tai, aišku, ta sistema sprendinių neturi.

Jeigu

$$c_1-\frac{c_2}{b_2}b_1=0,$$

tai kiekviena skaičių pora $(x;\ y)$: $y=\frac{c_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_2}x$, $x\in\boldsymbol{R}$, yra (8) sistemos sprendinys.

Vadinasi, šiuos teiginius įrodėme.

Jeigu $\Delta\neq0$, tai (1) sistema turi vienintelį sprendinį, apibrėžtą (5) ir (6) Kramerio formulėmis.

Jeigu $\Delta=0$, tai (1) sistema arba neturi sprendinių, arba jų turi be galo daug.

Smulkiau išnagrinėsime atvejį, kai $\Delta=0$. Sakykime, vėl $b_2\neq0$. Tada, pažymėję $k=\frac{b_1}{b_2}$, gausime (žr. (7) formulę) $a_1=ka_2$, $b_1=kb_2$. Vadinasi, šiuo atveju (1) sistema yra

$$\begin{cases} ka_2x+kb_2y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

Akivaizdu, kad ta sistema turi bent vieną sprendinį tada ir tik tada, kai $c_1=kc_2$.

Vadinasi, jeigu $\Delta=0$ ir $b_2\neq0$, tai (1) sistema turi sprendinį tada ir tik tada, kai jos pirmoji lygtis gaunama iš antrosios, ją padauginus iš $k=\frac{b_1}{b_2}$.

Tuos rezultatus gavome, tarę, kad $b_2\neq0$. Tačiau tai nemažina bendrumo. Jeigu, pavyzdžiui, būtų $b_1\neq0$, tai, sukeitę lygtis vietomis, gautume tuos pačius rezultatus. Jeigu būtų $a_1\neq0$, tai, sukeitę lygtis ir kintamuosius vietomis, vėl gautume išnagrinėtąjį atvejį.

Atskiras, bet svarbus (1) sistemos atvejis yra dviejų *tiesinių homogeninių lygčių* su dviem nežinomaisiais sistema:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0, \\ a_2x+b_2y=0. \end{cases} \tag{9}$$

Ta sistema visada turi sprendinį $x=0$, $y=0$.

Iš ankstesnių rezultatų išplaukia, kad (9) sistema turi vienintelį Kramerio formulėmis apibrėžtą sprendinį $x=0$, $y=0$, jeigu tik $\Delta\neq0$.

Jeigu $\Delta=0$ ir, pavyzdžiui, $b_1\neq0$, tai tos sistemos sprendinys yra bet kuris lygties $a_1x+b_1y=0$ sprendinys, t.y. bet kuri skaičių pora $(x;\ y)$:

$$y=-\frac{a_1}{b_1}x,\ x\in\boldsymbol{R}.$$

1 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 5x-3y=16, \\ x+2y=11. \end{cases}$$

Sprendimas. Randame Δ, Δ_x ir Δ_y:

$$\Delta=5\cdot2-1\cdot(-3)=13,$$
$$\Delta_x=16\cdot2-11\cdot(-3)=65,$$
$$\Delta_y=5\cdot11-16\cdot1=39;$$

tada

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{65}{13}=5,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{39}{13}=3.$$

Atsakymas: $x=5$, $y=3$.

2 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases}2x+3y=13,\\4x+6y=20.\end{cases}$$

Sprendimas. Padaliję antrąją lygtį iš 2, gausime ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases}2x+3y=13,\\2x+3y=10,\end{cases}$$

kuri yra nesuderinta. Taigi sistema sprendinių neturi.

3 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases}4x-\ \ 3y=\ \ 7,\\20x-15y=35.\end{cases}$$

Sprendimas. Padaliję antrąją sistemos lygtį iš 5, gausime

$$\begin{cases}4x-3y=7,\\4x-3y=7.\end{cases}$$

Ši sistema yra ekvivalenti vienai lygčiai su dviem nežinomaisiais ir turi be galo daug sprendinių $\left(x;\ \frac{4x-7}{3}\right)$, $x\in\boldsymbol{R}$.

4 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases}x\cos\alpha-y\sin\alpha=x',\\x\sin\alpha+y\cos\alpha=y'.\end{cases}$$

Sprendimas. Randame Δ, Δ_x ir Δ_y:

$$\Delta=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1,$$
$$\Delta_x=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha,$$
$$\Delta_y=y'\cos\alpha-x'\sin\alpha.$$

Kadangi $\Delta=1$, tai $x=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha$, $y=y'\cos\alpha-x'\sin\alpha$.

5 pavyzdys. Išspręsime homogeninę lygčių sistemą

$$\begin{cases} 5x+3y=0, \\ 2x-4y=0. \end{cases}$$

Sprendimas. Kadangi

$$\Delta=5\cdot(-4)-2\cdot3=-26\neq0,$$

tai sistema turi vienintelį nulinį sprendinį $x=0$, $y=0$.

6 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 3x+\ \ 5y=0, \\ 9x+15y=0. \end{cases}$$

Sprendimas. Kadangi

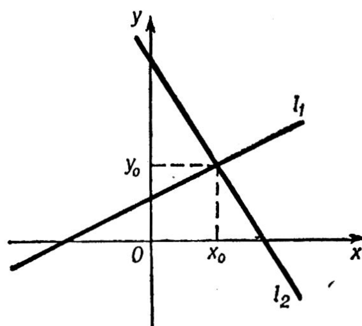
$$\Delta=3\cdot15-9\cdot5=0,$$

tai sistema turi be galo daug sprendinių $\left(x;\ -\frac{3}{5}x\right)$, $x\in\boldsymbol{R}$.

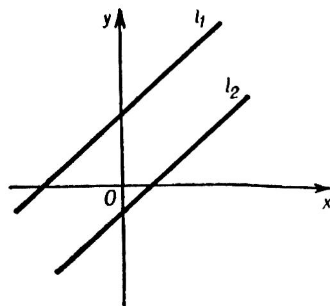
2. Jau buvo nurodyta, kad, sprendžiant dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą, galimi trys skirtingi atvejai:

1) sistema turi vienintelį sprendinį;
2) neturi sprendinių;
3) turi be galo daug sprendinių.

Tuos atvejus galima nesunkiai iliustruoti geometriškai. Priminsime, kad kiekviena tiesinė lygtis su dviem nežinomaisiais, kurios bent vienas koeficientas prie nežinomųjų nelygus nuliui, plokštumoje aprašo tiesę.



1 pav.



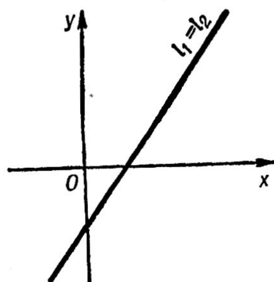
2 pav.

1. Jeigu tiesės l_1 ir l_2 kertasi, t.y. turi vieną bendrą tašką $(x_0;\ y_0)$, tai tas tieses aprašančių tiesinių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį $(x_0;\ y_0)$. Atvirkščiai, jeigu dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistema turi vienintelį sprendinį $(x_0;\ y_0)$, tai tiesės l_1 ir l_2, kurias aprašo sistemos lygtys, kertasi taške $(x_0;\ y_0)$ (1 pav.).

2. Jeigu tiesės l_1 ir l_2 yra lygiagrečios ir neturi bendrų taškų, tai tas tieses aprašančių tiesinių lygčių sistema neturi sprendinių. Atvirkščiai, jeigu

dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistema neturi sprendinių, tai tiesės l_1 ir l_2, kurias aprašo tos lygtys, neturi bendrų taškų, t.y. jos yra lygiagrečios ir nesutampančios (2 pav.).

3. Jeigu tiesės l_1 ir l_2 sutampa, t.y. kiekvienas pirmosios tiesės taškas yra ir antrosios tiesės taškas, tai atitinkama lygčių sistema turi be galo daug sprendinių. Atvirkščiai, jeigu dviejų tiesinių lygčių sistema turi be galo daug sprendinių, tai tiesės l_1 ir l_2, kurias aprašo tos sistemos lygtys, sutampa (3 pav.).



3 pav.

7 pavyzdys. Raskime tiesių, aprašytų lygtimis

$$3x+2y-13=0,$$

$$4x-3y-6=0,$$

sankirtos koordinates.

Sprendimas. Rasti tiesių sankirtos taško koordinates – tai rasti sistemos

$$\begin{cases} 3x+2y=13, \\ 4x-3y=6 \end{cases}$$

sprendinį.

Randame Δ, Δ_x ir Δ_y:

$$\Delta=3\cdot(-3)-4\cdot2=-17,$$

$$\Delta_x=13\cdot(-3)-6\cdot2=-51,$$

$$\Delta_y=3\cdot6-4\cdot13=-34;$$

taigi

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-51}{-17}=3, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-34}{-17}=2.$$

Atsakymas: $x=3$, $y=2$.

§ 2. ANTROSIOS EILĖS DETERMINANTAI IR JŲ SAVYBĖS

1. Bet kokią kvadratinę lentelę

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{Vmatrix}, \qquad (1)$$

kurioje a_1, b_1, a_2, b_2 – kokie nors skaičiai, vadinsime *antrosios eilės kvadratine matrica*, o skaičius a_1, b_1, a_2, b_2 – tos *matricos elementais.*

Apibrėžimas. Skaičių $a_1b_2-a_2b_1$ vadinsime (1) *matricos determinantu* ir žymėsime

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Taigi, remiantis apibrėžimu.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Antrosios eilės kvadratinės matricos determinantą vadinsime *antrosios eilės determinantu.*

Skaičius a_1, b_1, a_2, b_2 vadinsime *determinanto elementais.* Matome, kad determinantą užrašome, jo elementus išdėstydami kvadratu. Įstrižainė, kuriai priklauso elementai a_1 ir b_2, vadinama *pagrindine*, o įstrižainė, kuriai priklauso elementai a_2 ir b_1, – *šalutine.*

Dabar suformuluosime antrosios eilės determinanto skaičiavimo taisyklę.

Norint apskaičiuoti antrosios eilės determinantą, reikia iš pagrindinės įstrižainės elementų sandaugos atimti šalutinės įstrižainės elementų sandaugą.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Pagrindinės įstrižainės elementai yra 2 ir 7, taigi jų sandauga $2\cdot7=14$; šalutinės įstrižainės elementai yra 3 ir 4, o jų sandauga $3\cdot4=12$.

Remiantis apibrėžimu,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14-12=2.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Remiantis apibrėžimu,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 - 4\cdot 5 = -14.$$

3 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Remiantis apibrėžimu,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4) - 5\cdot 0 = -12.$$

2. Ankstesniojo paragrafo (5) ir (6) (Kramerio) formules dabar galėtume užrašyti šitaip:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{3}$$

Toliau (3) formulės determinantus žymėsime (žr. § 1)

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \Delta,$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 = \Delta_x,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 = \Delta_y.$$

Tada (3) formulės atrodys šitaip:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Remiantis (3) formulėmis, galima nurodyti taisyklę, kaip iš vardiklio determinanto gauti skaitiklių determinantus: reikia koeficientų prie ieškomo nežinomojo stulpelį pakeisti sistemos laisvųjų narių stulpeliu. Iš tikrųjų Δ_x yra gaunamas iš Δ, pakeitus a_1 ir a_2 laisvaisiais nariais c_1 ir c_2, o Δ_y gaunamas iš Δ, pakeitus b_1 ir b_2 laisvaisiais nariais c_1 ir c_2.

4 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 5x + 2y = 29, \\ 3x + 4y = 23. \end{cases}$$

Sprendimas. Rasime determinantus Δ, Δ_x ir Δ_y:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=5\cdot4-2\cdot3=14,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 29 & 2 \\ 23 & 4 \end{vmatrix}=29\cdot4-2\cdot23=70,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 29 \\ 3 & 23 \end{vmatrix}=5\cdot23-3\cdot29=28.$$

Taigi

$$x=\frac{70}{14}=5, \quad y=\frac{28}{14}=2.$$

Atsakymas: $x=5$, $y=2$.

5 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 4x+3y-28=0, \\ 3x-5y-21=0. \end{cases}$$

Sprendimas. Sistemą užrašome standartiniu pavidalu

$$\begin{cases} 4x+3y=28, \\ 3x-5y=21. \end{cases}$$

Randame determinantus Δ, Δ_x ir Δ_y:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}=4\cdot(-5)-3\cdot3=-29,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 28 & 3 \\ 21 & -5 \end{vmatrix}=28\cdot(-5)-3\cdot21=-203,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 4 & 28 \\ 3 & 21 \end{vmatrix}=4\cdot21-28\cdot3=0.$$

Taigi

$$x=\frac{-203}{-29}=7, \quad y=\frac{0}{-29}=0.$$

Atsakymas: $x=7$, $y=0$.

3. Suformuluosime pagrindines antrosios eilės determinantų savybes.

1 savybė.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

t.y. determinantas nepasikeičia, sukeitus atitinkamas eilutes ir stulpelius vietomis.

Remiantis šia savybe, eilutės ir stulpeliai yra lygiaverčiai. Todėl toliau visas determinantų savybes formuluosime tik eilutėms.

2 savybė.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},$$

t.y. sukeitus dvi eilutes vietomis, pasikeičia determinanto ženklas.

3 savybė.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

t.y. jeigu visi vienos eilutės elementai turi bendrą daugiklį, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą. Kitaip tariant, jeigu visus kurios nors determinanto eilutės narius padauginsime iš kokio nors skaičiaus, tai ir determinantas bus padaugintas iš to paties skaičiaus.

4 savybė.

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

t.y. jeigu visi kurios nors determinanto eilutės (stulpelio) elementai yra užrašyti kaip dviejų dėmenų suma, tai determinantas yra lygus sumai dviejų tokių determinantų, kurių viename sumos yra pakeistos pirmaisiais dėmenimis, o kitame – antraisiais. Kitaip tariant, jeigu kurios nors determinanto eilutės (stulpelio) visi elementai išreiškiami dviejų (keleto) dėmenų suma, tai tą determinantą galima išreikšti dviejų (keleto) determinantų suma.

1 išvada. *Jeigu vienos determinanto eilutės (stulpelio) visi elementai yra atitinkamai lygūs kitos eilutės (stulpelio) elementams, tai toks determinantas lygus nuliui.*

2 išvada. *Jeigu vienos determinanto eilutės (stulpelio) visi elementai yra atitinkamai proporcingi kitos eilutės (stulpelio) elementams, tai toks determinantas lygus nuliui.*

3 išvada. *Prie kurios nors eilutės (stulpelio) elementų pridėjus atitinkamus kitos eilutės (stulpelio) elementus arba jiems proporcingus skaičius, determinantas nekinta.*

Pailiustruosime pavyzdžiais, kaip skaičiuojami determinantai, remiantis tomis savybėmis.

6 pavyzdys. Apskaičiuokime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 325 & -132 \\ 175 & -60 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Iš pirmo stulpelio iškeliame prieš determinanto ženklą bendrąjį daugiklį 25:

$$\Delta = 25\begin{vmatrix} 13 & -132 \\ 7 & -60 \end{vmatrix},$$

o iš antro stulpelio – bendrąjį daugiklį -12:

$$\Delta=25\cdot(-12)\begin{vmatrix} 13 & 11 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Po to iš gautojo determinanto pirmos eilutės atimame antrąją:

$$\Delta=25\cdot(-12)\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Dabar iš pirmos eilutės iškeliame bendrąjį daugiklį 6:

$$\Delta=25\cdot(-12)\cdot 6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}=-1800\cdot(5-7)=3600.$$

7 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\Delta=\begin{vmatrix} 105 & 55 \\ 245 & 154 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Iš pirmos eilutės iškeliame bendrąjį daugiklį 5, o iš antros 7:

$$\Delta=5\cdot 7\begin{vmatrix} 21 & 11 \\ 35 & 22 \end{vmatrix}.$$

Vėl iš pirmo stulpelio iškeliame bendrąjį daugiklį 7, o iš antro 11:

$$\Delta=35\cdot 7\cdot 11\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=2695.$$

§ 3. TREČIOSIOS EILĖS DETERMINANTAI IR JŲ SAVYBĖS

1. Bet kokią kvadratinę lentelę

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

kurioje a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 – kokie nors skaičiai, vadinsime *trečiosios eilės kvadratine matrica,* o skaičius a_1, b_1, c_1, ..., c_3 – tos *matricos elementais.*

Apibrėžimas. Skaičių

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

vadinsime (1) *matricos determinantu* ir žymėsime

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Vadinasi, remiantis apibrėžimu,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Trečiosios eilės kvadratinės matricos determinantą vadinsime *trečiosios eilės determinantu.*

Remiantis apibrėžimu, trečiosios eilės determinantas yra išreiškiamas antrosios eilės determinantais.

(3) formulė vadinama *trečiosios eilės determinanto dėstiniu pirmosios eilutės elementais.*

1 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Remiantis (3) formule,

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix},$$

todėl

$$\Delta = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Determinantą išdėstome pirmos eilutės elementais:

$$\Delta = 2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Taigi

$$\Delta = 2 \cdot (-2 - 18) - 3 \cdot (-10 + 6) - 4 \cdot (15 + 1) =$$

$$= 2 \cdot (-20) - 3 \cdot (-4) - 4 \cdot 16 = -92.$$

3 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Remiantis (3) formule,

$$\Delta = 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$

todėl

$$\Delta = 1 \cdot (-14) + 2 \cdot (-21) + 3 \cdot (-7) = -77.$$

4 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Remiantis (3) formule,

$$\Delta = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix},$$

todėl

$$\Delta = 5 \cdot 6 = 30.$$

2. Kaip žinoma, dviejų vektorių, išreikštų projekcijomis koordinačių ašyse, vektorinė sandauga lygi (žr. ,,Geometrijos" I dalį)

$$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] = \boldsymbol{i}(y_1 z_2 - y_2 z_1) + \boldsymbol{j}(z_1 x_2 - z_2 x_1) + \boldsymbol{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Ta formulė yra gremėzdiška, ir ją sunku atsiminti. Dešiniąją jos pusę galima užrašyti šitaip:

$$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

ir laikyti, kad vektorinė sandauga yra determinanto dėstinys pirmosios eilutės elementais.

Taip užrašytą formulę daug lengviau įsiminti. Jeigu $z_1 = z_2 = 0$, t.y. vektoriai $\boldsymbol{a}$ ir $\boldsymbol{b}$ priklauso xOy plokštumai, tai

$$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

5 pavyzdys. Rasime dviejų vektorių $\boldsymbol{a} = (2; 3; -4)$ ir $\boldsymbol{b} = (5; 1; 2)$ vektorinę sandaugą.

Sprendimas. Įrašę vektorių $\boldsymbol{a}$ ir $\boldsymbol{b}$ koordinates į (4) formulę, gausime

$$[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}=\boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-\boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}+\boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix},$$

arba

$$[\boldsymbol{a};\ \boldsymbol{b}]=10\boldsymbol{i}-24\boldsymbol{j}-13\boldsymbol{k}.$$

6 pavyzdys. Apskaičiuosime plotą trikampio, kurio viršūnės yra $A(1;\ 2)$, $B(4;\ -5)$, $C(5;\ 3)$.

Sprendimas. Kadangi vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$ apibrėžto lygiagretainio plotas yra $S=|[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}]|$, tai trikampio ABC plotas apskaičiuojamas pagal formulę

$$S_\Delta=\frac{1}{2}|[\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}]|.$$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|31\boldsymbol{k}|=\frac{31}{2}.$$

3. Trečiosios eilės determinantai pasižymi tokiomis pat savybėmis, kaip ir antrosios eilės determinantai; tuo galima įsitikinti tiesiog skaičiuojant.

Suformuluosime pagrindines trečiosios eilės determinantų savybes.

1 savybė.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

t.y. sukeitus atitinkamas eilutes ir stulpelius vietomis, determinantas nesikeičia.

2 savybė.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

t.y. sukeitus dvi bet kurias determinanto eilutes (stulpelius) vietomis, keičiasi determinanto ženklas.

3 savybė.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

t.y. jeigu visi kurios nors eilutės (stulpelio) elementai turi bendrąjį daugiklį, tai jį galima iškelti prieš determinanto ženklą.

Kitaip tariant, jeigu visus kurios nors eilutės (stulpelio) elementus padauginsime iš kokio nors skaičiaus, tai ir determinantas bus padaugintas iš to skaičiaus.

4 savybė.

$$\begin{vmatrix} a_1+a_1' & b_1+b_1' & c_1+c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

t.y. jeigu visi vienos determinanto eilutės (stulpelio) elementai yra dviejų dėmenų suma, tai determinantas lygus sumai dviejų determinantų, kurių viename sumos yra pakeistos pirmaisiais dėmenimis, o kitame – antraisiais.

Ta determinanto savybė yra teisinga ir tuo atveju, kai kurios nors eilutės (stulpelio) elementai yra suma ne dviejų, o daugiau dėmenų.

1 išvada. *Jeigu dvi kurios nors determinanto eilutės (stulpeliai) yra vienodos, tai determinantas lygus nuliui.*

2 išvada. *Jeigu visi vienos eilutės (stulpelio) elementai yra atitinkamai proporcingi kitos eilutės (stulpelio) elementams, tai determinantas lygus nuliui.*

3 išvada. *Prie vienos eilutės (stulpelio) elementų atitinkamai pridėjus kitos eilutės (stulpelio) elementus arba jiems proporcingus skaičius, determinantas nepasikeičia.*

Pailiustruosime, kaip, remiantis tomis savybėmis, apskaičiuojami determinantai.

7 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} -14 & 21 & 28 \\ 6 & -9 & 12 \\ 10 & 15 & -20 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Kiekvienos eilutės, o paskui kiekvieno stulpelio elementų bendrąjį daugiklį iškeliame prieš determinanto ženklą:

$$\Delta = 7\cdot3\cdot5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 7\cdot3\cdot5\cdot2\cdot3\cdot4 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Kadangi

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

tai

$$\Delta = 7\cdot3\cdot5\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4 = 10\,080.$$

8 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 36 & -24 & 60 \\ 20 & 27 & 46 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Antros eilutės elementų bendrąjį daugiklį iškeliame prieš determinanto ženklą:

$$\Delta = 12 \begin{vmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 3 & -2 & 5 \\ 20 & 27 & 46 \end{vmatrix}.$$

Iš trečios eilutės elementų atimame atitinkamus pirmos eilutės elementus:

$$\Delta = 12 \begin{vmatrix} 17 & 29 & 41 \\ 3 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Kadangi determinantas, kurio dvi eilutės sutampa, lygus nuliui, tai

$$\Delta = 0.$$

9 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 49 & 37 & 41 \\ 23 & 37 & 41 \\ 95 & 74 & 82 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Iš pirmos eilutės elementų atimame atitinkamus antros eilutės elementus:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 23 & 37 & 41 \\ 95 & 74 & 82 \end{vmatrix}.$$

Po to determinantą išdėstome pirmos eilutės elementais:

$$\Delta = 26 \begin{vmatrix} 37 & 41 \\ 74 & 82 \end{vmatrix}.$$

Kadangi determinantas, kurio dvi eilutės yra proporcingos, lygus nuliui, tai

$$\Delta = 0.$$

10 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 36 & 48 & 30 \\ 6 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Antrosios ir trečiosios eilučių, pirmojo ir antrojo stulpelių elementų bendruosius daugiklius 6, 2, 3 ir 4 iškeliame prieš determinanto ženklą:

$$\Delta = 6\cdot 2 \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ 6 & 8 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Po to apskaičiuojame gautąjį determinantą:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 1 - 1 + 0 = 2,$$

taigi

$$\Delta = 6\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2 = 288.$$

11 pavyzdys. Apskaičiuosime determinantą

$$\Delta = \begin{vmatrix} 19 & 12 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 24 & 27 & 12 \end{vmatrix}.$$

Sprendimas. Iš trečios determinanto eilutės atimame pirmą. Kadangi gautojo determinanto dvi eilutės yra proporcingos, tai

$$\Delta = \begin{vmatrix} 19 & 12 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

§ 4. TRIJŲ TIESINIŲ LYGČIŲ SU TRIMIS NEŽINOMAISIAIS SISTEMOS

Nagrinėsime trijų tiesinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3. \end{cases} \tag{1}$$

Ją galima trumpiau užrašyti šitaip:

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i, \quad i = 1,\ 2,\ 3;$$

čia a_i, b_i, c_i, d_i — kokie nors duoti skaičiai, o x, y, z — ieškomi nežinomieji.

Jeigu, įrašę trejeto $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ skaičius į (1) sistemos lygtis, gausime tapatybes, tai tą trejetą vadinsime (1) *sistemos sprendiniu.*

Iš pradžių nagrinėsime atvejį, kai visi (1) sistemos koeficientai lygūs nuliui:

$$a_i = b_i = c_i = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3.$$

Jeigu ir visi sistemos lygčių laisvieji nariai lygūs nuliui:

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0,$$

tai akivaizdu, kad kiekvienas skaičių trejetas $(x;\ y;\ z)$ yra tos sistemos sprendinys. Jeigu ne visi laisvieji nariai lygūs nuliui, tai sistema sprendinių neturi.

Dabar nagrinėsime įdomesnį atvejį, kai ne visi (1) sistemos lygčių koeficientai lygūs nuliui. Jeigu, pavyzdžiui, $c_3 \neq 0$, tai duotoji sistema yra ekvivalenti šitokiai:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, \\ \dfrac{a_3}{c_3} x + \dfrac{b_3}{c_3} y + z = \dfrac{d_3}{c_3}. \end{cases}$$

Paskutinę tos sistemos lygtį padauginę iš c_1 ir panariui atėmę iš pirmosios, gausime

$$\left(a_1 - \frac{a_3}{c_3} c_1\right) x + \left(b_1 - \frac{b_3}{c_3} c_1\right) y = d_1 - \frac{d_3}{c_3} c_1. \tag{2}$$

Analogiškai, paskutinę lygtį padauginę iš c_2 ir panariui atėmę iš antrosios, gausime

$$\left(a_2 - \frac{a_3}{c_3} c_2\right) x + \left(b_2 - \frac{b_3}{c_3} c_2\right) y = d_2 - \frac{d_3}{c_3} c_2. \tag{3}$$

Akivaizdu, kad sistema

$$\begin{cases} (a_1 c_3 - a_3 c_1) x + (b_1 c_3 - b_3 c_1) y = d_1 c_3 - d_3 c_1, \\ (a_2 c_3 - a_3 c_2) x + (b_2 c_3 - b_3 c_2) y = d_2 c_3 - d_3 c_2, \\ \dfrac{a_3}{c_3} x + \dfrac{b_3}{c_3} y + z = \dfrac{d_3}{c_3}, \end{cases} \tag{4}$$

kurios pirmoji ir antroji lygtys gaunamos atitinkamai iš (2) ir (3), padauginus jas iš c_3, yra ekvivalenti (1) sistemai.

Vadinasi, jeigu $c_3 \neq 0$, tai vietoj (1) sistemos pakanka išnagrinėti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} (a_1 c_3 - a_3 c_1) x + (b_1 c_3 - b_3 c_1) y = d_1 c_3 - d_3 c_1, \\ (a_2 c_3 - a_3 c_2) x + (b_2 c_3 - b_3 c_2) y = d_2 c_3 - d_3 c_2. \end{cases} \tag{5}$$

Iš pradžių nagrinėsime atvejį, kai visi (5) sistemos lygčių koeficientai lygūs nuliui. Jeigu visi laisvieji (5) sistemos lygčių nariai lygūs nuliui, tai

kiekviena skaičių pora $(x;\ y)$ yra (5) sistemos sprendinys, taigi kiekvienas skaičių trejetas $(x;\ y;\ z)$, $x\in \boldsymbol{R}$, $y\in \boldsymbol{R}$,

$$z=\frac{d_3}{c_3}-\frac{a_3}{c_3}x-\frac{b_3}{c_3}y,$$

yra (1) sistemos sprendinys. Jeigu bent vienas (5) lygčių sistemos laisvasis narys nelygus nuliui, tai (5), vadinasi, ir (1) sistema sprendinių neturi.

Nagrinėsime atvejį, kai ne visi (5) sistemos lygčių koeficientai lygūs nuliui. Jeigu, pavyzdžiui,

$$b_2c_3-b_3c_2\neq 0,$$

tai, padauginę pirmą (5) sistemos lygtį iš $b_2c_3-b_3c_2$, antrą iš $-(b_1c_3-$ $-b_3c_1)$, sudėję jas ir atlikę paprastus pertvarkymus, gausime lygtį

$$\Delta\cdot x=\Delta_x,$$

kurioje

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},\quad \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1\\ d_2 & b_2 & c_2\\ d_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Taigi (5) sistema yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases}\Delta\cdot x=\Delta_x,\\ \dfrac{a_2c_3-a_3c_2}{b_2c_3-b_3c_2}x+y=\dfrac{d_2c_3-d_3c_2}{b_2c_3-b_3c_2},\end{cases}$$

jeigu tik $b_2c_3-b_3c_2\neq 0$.

Jeigu $\Delta=\Delta_x=0$, tai akivaizdu, kad bet kuri skaičių pora $(x;\ y)$, $x\in \boldsymbol{R}$,

$$y=\frac{d_2c_3-d_3c_2}{b_2c_3-b_3c_2}-\frac{a_2c_3-a_3c_2}{b_2c_3-b_3c_2}x, \tag{6}$$

yra (5) sistemos sprendinys.

Iš (6) išraiškos ir (4) sistemos paskutinės lygties gauname

$$z=\frac{b_2d_3-b_3d_2}{b_2c_3-b_3c_2}+\frac{a_2b_3-a_3b_2}{b_2c_3-b_3c_2}x. \tag{7}$$

Vadinasi, jeigu $\Delta=\Delta_x=0$ ir $b_2c_3-b_3c_2\neq 0$, tai bet kuris skaičių trejetas $(x;\ y;\ z)$, kur $x\in \boldsymbol{R}$, o y ir z randami pagal (6) ir (7) formules, yra (1) sistemos sprendinys.

Jeigu $\Delta=0$, $\Delta_x\neq 0$, tai (5), taip pat ir (1) sistema sprendinių neturi.

Jeigu $\Delta\neq 0$, tai $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$. Įrašę tą x reikšmę į antrąją (5) sistemos lygtį, gausime

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1\\ a_2 & d_2 & c_2\\ a_3 & d_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

Pagaliau, įrašę gautąsias x ir y reikšmes į trečiąją (4) sistemos lygtį, rasime

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta},$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Vadinasi, jeigu $\Delta \neq 0$, tai (1) sistema turi vienintelį sprendinį, kuris randamas, remiantis vadinamosiomis *Kramerio formulėmis*:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{8}$$

Determinantas Δ vadinamas (1) *sistemos determinantu*. Taigi įrodėme šiuos teiginius.

Jeigu tiesinės lygčių sistemos determinantas nelygus nuliui, tai sistema turi vienintelį sprendinį. Jeigu sistemos determinantas lygus nuliui, tai ji arba neturi sprendinių, arba jų turi be galo daug.

Pastebėsime, kad Kramerio formulėse determinantai Δ_x, Δ_y, Δ_z gaunami iš determinanto Δ, koeficientų prie atitinkamų nežinomųjų stulpelį pakeitus laisvųjų narių stulpeliu.

Ką tik išnagrinėtas (1) sistemos tyrimo ir sprendimo metodas yra vadinamas *kintamųjų eliminavimo*, arba *Gauso metodu*.

Jeigu $c_3 \neq 0$, tai iš (1) sistemos trečiosios lygties kintamąjį z galima išreikšti kintamaisiais x ir y ir tą z reikšmę įrašyti į pirmąją ir antrąją lygtis. Gausime dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą ir sakysime, kad iš trijų lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos, eliminavę kintamąjį z, gavome dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą. Vietoj z galima eliminuoti bet kurį kintamąjį, ir eliminuojamą nežinomąjį galima rasti iš bet kurios lygties, kurioje jis yra.

1 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} x=3, \\ 2x+y=8, \\ 4x-2y-z=3. \end{cases}$$

Sprendimas. Įrašę į antrąją sistemos lygtį $x=3$, gausime $y=8-2x=$ $=8-2\cdot 3=2$.

Įrašę į trečiąją sistemos lygtį $x=3$, $y=2$, gausime $z=4x-2y-3=$ $=4\cdot 3-2\cdot 2-3=5$.

Atsakymas: $x=3$, $y=2$, $z=5$.

2 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ x-2y=-4, \\ 3x+y-z=3. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš pirmųjų dviejų sistemos lygčių radę $x=2$, $y=3$ ir tas reikšmes įrašę į trečiąją sistemos lygtį, gausime $z=3\cdot 2+3-3=6$.

Atsakymas: (2; 3; 6).

3 pavyzdys. Naudodamiesi determinantais, išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 2x+3y+\ \ z=14, \\ 3x-\ \ y+2z=\ \ 5, \\ \ \ x+2y-\ \ z=\ \ 7. \end{cases}$$

Sprendimas. Kadangi sistemos determinantas

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-3)-3\cdot(-5)+1\cdot 7=16\neq 0,$$

tai sistema turi vienintelį sprendinį. Rasime determinantus Δ_x, Δ_y, Δ_z:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix}=14\cdot(-3)-3\cdot(-19)+1\cdot 17=32,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 14 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-19)-14\cdot(-5)+1\cdot 16=48,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 14 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}=2\cdot(-17)-3\cdot 16+14\cdot 7=16$$

ir, pritaikę Kramerio formules, gausime

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{32}{16}=2,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{48}{16}=3,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{16}{16}=1.$$

Atsakymas: (2; 3; 1).

4 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 3x+8y=30, \\ 2x+3y-z=\ \ 8, \\ x+5y+z=22. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš trečiosios lygties rastąją z reikšmę

$$z=22-x-5y$$

įrašome į antrąją lygtį:

$$2x+3y-(22-x-5y)=8,$$

arba

$$3x+8y=30.$$

Kadangi gautoji lygtis sutampa su pirmąja duotosios sistemos lygtimi, tai duotoji sistema yra ekvivalenti dviejų lygčių su trimis nežinomaisiais sistemai

$$\begin{cases} 3x+8y=30, \\ x+5y+z=22. \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties

$$y=\frac{1}{8}(30-3x)=\frac{3}{8}(10-x),$$

o iš antrosios

$$z=22-x-5y=22-x-\frac{15}{8}(10-x)=$$
$$=\frac{1}{8}(176-8x-150+15x)=\frac{1}{8}(26+7x).$$

Taigi bet kuris skaičių trejetas

$$x,\ y=\frac{3}{8}(10-x),\quad z=\frac{1}{8}(26+7x),$$

kur $x\in \boldsymbol{R}$, yra duotosios sistemos sprendinys. Kitų sprendinių ta sistema neturi.

5 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 4x-3y+2z=11, \\ 2x-1{,}5y+\ z=\ 5{,}5, \\ 6x-4{,}5y+3z=16{,}5. \end{cases}$$

Sprendimas. Kadangi antroji sistemos lygtis gaunama padalijus pirmąją lygtį iš 2, o trečioji – padauginus pirmąją lygtį iš 1,5, tai iš tikrųjų sistemą sudaro tik viena lygtis. Taigi duotoji sistema yra ekvivalenti lygčiai

$$4x-3y+2z=11.$$

Todėl tos lygties, vadinasi, ir duotosios sistemos sprendinys yra bet kuris skaičių trejetas $\left(x;\ y;\ \frac{11-4x+3y}{2}\right)$, $x,\ y\in \boldsymbol{R}$.

6 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 3x+2y-z=12, \\ 2x-3y+z=\ 1. \end{cases}$$

Sprendimas. Duotoji sistema yra atskiras trijų lygčių su trimis nežinomaisiais sistemos atvejis, kai trečiąja lygtimi imama arba pirmoji, arba antroji lygtis, arba lygtis $0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=0$. Analogišką sistemą nagrinėjome 4 pavyzdyje. 5 pavyzdyje nagrinėjome sistemą, kurią iš tikrųjų sudarė viena lygtis.

Sudėję panariui duotosios sistemos lygtis, gausime lygtį

$$5x-y=13,$$

taigi $y=5x-13$. Įrašę tą y reikšmę į antrąją lygtį, rasime

$$z=1-2x+3(5x-13)=13x-38.$$

Taigi bet kuris skaičių trejetas

$$x,\ y=5x-13,\ z=13x-38,$$

kur $x \in \mathbf{R}$, yra duotosios sistemos sprendinys. Kitų sprendinių ta sistema neturi.

7 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 2x+3y-\ z=0, \\ 4x+6y-3z=0. \end{cases}$$

Sprendimas. Tą sistemą spręsime y ir z atžvilgiu. Iš pirmosios lygties gautą z reikšmę

$$z=2x+3y$$

įrašome į antrąją lygtį

$$4x+6y-3(2x+3y)=0,$$

t.y. $2x+3y=0$. Taigi

$$y=-\frac{2}{3}x,\ z=2x-2x=0.$$

Atsakymas: $\left(x;\ -\frac{2}{3}x;\ 0\right)$, $x \in \mathbf{R}$.

8 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 3x+4y=25, \\ 5x-2y=\ 7, \\ x+3y=15. \end{cases}$$

Sprendimas. Duotoji sistema yra atskiras bendrosios (1) sistemos atvejis, kai $c_1=c_2=c_3=0$. Visose trijose lygtyse nėra nežinomojo z, taigi ta sistema yra trijų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistema. Ją spręsime kintamųjų eliminavimo metodu.

Išsprendę dvi paskutines sistemos lygtis, gausime $x=3$, $y=4$. Kadangi tos x ir y reikšmės tenkina ir pirmąją lygtį

$$3 \cdot 3+4 \cdot 4=25,$$

tai sistemos sprendinys yra $x=3$, $y=4$. Kitų sprendinių sistema neturi.

Atkreipsime dėmesį į tai, kad, nagrinėdami sistemą kaip sistemą su trimis nežinomaisiais x, y, z, gausime be galo daug sprendinių $(3; 4; z)$, $z \in \mathbf{R}$.

9 pavyzdys. Išspręsime sistemą

$$\begin{cases} 2x+3y=13, \\ 3x+\ y=\ 9, \\ 5x-4y=\ 1. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš pirmųjų dviejų lygčių radę $x=2$, $y=3$ ir įrašę šias reikšmes į trečiąją lygtį, matome, kad jos netenkina tos lygties. Taigi duotoji sistema sprendinių neturi.

§ 5. TIESINIŲ LYGČIŲ SU n NEŽINOMŲJŲ SISTEMA

Nagrinėsime m tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistemą. Kai nežinomųjų ir lygčių yra daug, kintamieji žymimi viena raide su įvairiais indeksais, pavyzdžiui:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,$$

o lygties koeficientai — raide su dviem indeksais, pavyzdžiui:

$$a_{ij},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Čia pirmasis indeksas reiškia lygties numerį, o antrasis — numerį nežinomojo, prie kurio yra tas koeficientas.

Trijų lygčių su trimis nežinomaisiais sistema, vartojant tokius simbolius, užrašoma šitaip:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

m tiesinių lygčių su n nežinomųjų sistema užrašoma šitaip:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

i-ąją (1) sistemos lygtį $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=b_i$ trumpiau galima užrašyti: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i$, o pačią sistemą

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Σ (graikiška raidė „sigma“) yra sumavimo ženklas. Jis rodo, kad reikia sudėti duotuosius reiškinius, kai sumavimo indeksas įgyja visas sveikąsias reikšmes nuo reikšmės ženklo Σ apačioje iki reikšmės ženklo viršuje.

Reikia įsidėmėti tai, kad tarp nežinomųjų skaičiaus n ir lygčių skaičiaus m bendruoju atveju jokio ryšio nėra. Taigi galimi visi trys atvejai:

$$m=n, \quad m<n, \quad m>n.$$

Reikia atsiminti ir tai, kad *lygties* su n nežinomųjų $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sprendiniu* yra vadinama tokia baigtinė n skaičių seka $(c_1; c_2; \ldots; c_n)$, kad lygtis tampa tapatybe, kai

$$x_1=c_1, \quad x_2=c_2, \quad \ldots, \quad x_n=c_n.$$

(1) *sistemos sprendiniu* yra vadinama bet kokia baigtinė n skaičių seka $(c_1; c_2; \ldots; c_n)$, kuri yra kiekvienos sistemai priklausančios lygties sprendinys.

Kaip ir sistemos su dviem ir trimis nežinomaisiais, m tiesinių lygčių su n nežinomaisiais sistemos yra sprendžiamos kintamųjų eliminavimo metodu.

Pavyzdys. Išspręskime sistemą

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3+3x_4=-4, \\ x_1-4x_2+3x_3-2x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=3, \\ 2x_1+4x_2-2x_3-3x_4=6. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš pradžių iš pirmosios, trečiosios ir ketvirtosios lygčių eliminuosime nežinomąjį x_1. Antrąją lygtį padauginę iš 3 ir panariui atėmę iš trečiosios, po to vėl antrąją lygtį padauginę iš 2 ir panariui atėmę iš pirmosios ir ketvirtosios lygčių, gausime sistemą

$$\begin{cases} x_1-4x_2+3x_3-2x_4=-1, \\ 14x_2-11x_3+7x_4=6, \\ 12x_2-8x_3+x_4=8, \\ 9x_2-10x_3+7x_4=-2, \end{cases}$$

ekvivalenčią duotajai.

Norint išspręsti gautąją sistemą, reikia išspręsti trijų paskutinių lygčių su trimis nežinomaisiais sistemą:

$$\begin{cases} 14x_2-11x_3+7x_4=6, \\ 12x_2-8x_3+x_4=8, \\ 9x_2-10x_3+7x_4=-2. \end{cases}$$

Tokias sistemas jau sprendėme ankstesniame paragrafe. Išsprendę ją vienu iš žinomų metodų, pavyzdžiui, kintamųjų eliminavimo, rasime $x_2=2$, $x_3=2$, $x_4=0$, po to iš lygties

$$x_1-4x_2+3x_3-2x_4=-1$$

rasime x_1:

$$x_1=-1+4\cdot2-3\cdot2+2\cdot0=1.$$

Taigi keturių skaičių seka (1; 2; 2; 0) yra duotosios sistemos sprendinys; kitų sprendinių nėra.

Atsakymas: (1; 2; 2; 0).

Daugiau pavyzdžių nenagrinėsime, tik priminsime, kad, spręsdami m lygčių su n nežinomųjų sistemą kintamųjų eliminavimo metodu, visada pereisime prie $m-1$ lygties su $n-1$ nežinomuoju sistemos sprendimo.

§ 6. BENDROS ŽINIOS APIE TIESINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIUS

Iš pradžių nagrinėsime paprastą duonos pervežimo uždavinį.

Pavyzdys. Tris miesto rajonus aprūpina duona du kombinatai. Pirmajame rajone kasdien suvartojama 26 t duonos, antrajame – 14 t, trečiajame – 10 t. Kombinatas Nr 1. kasdien iškepa 30 t duonos, o kombinatas Nr. 2 – 20 t. Vienos tonos pristatymo kiekvienam rajonui iš kiekvieno kombinato kaina rubliais pateikta I lentelėje.

I lentelė

Kombinatas	Rajonas		
	1	2	3
Nr. 1	3	4	6
Nr. 2	3	5	2

Reikia sudaryti ekonomiškiausią duonos pervežimo planą (programą).

Sprendimas. Pažymėkime raide x iš kombinato Nr. 1 į pirmąjį rajoną atvežtos duonos kiekį, raide y – iš to paties kombinato į antrąjį rajoną atvežtos duonos kiekį. Tada į trečiąjį rajoną iš kombinato Nr. 1 atvežta $30-x-y$ tonų duonos. Kadangi pirmajame rajone kasdien suvartojama 26 t, tai $26-x$ t reikia pristatyti iš kombinato Nr. 2. Analogiškai iš kombinato Nr. 2 reikia pristatyti $14-y$ t duonos į antrąjį rajoną ir $x+y-20$ t į trečiąjį.

Kasdieninis duonos pervežimo planas pavaizduotas II lentelėje.

II lentelė

Kombinatas	Rajonas		
	1	2	3
Nr. 1	x	y	$30-x-y$
Nr. 2	$26-x$	$14-y$	$x+y-20$

Akivaizdu, kad viso pervežimo kaina S yra I ir II lentelės atitinkamų skaičių sandaugų suma:

$$S=3x+4y+6(30-x-y)+3(26-x)+5(14-y)+2(x+y-20),$$

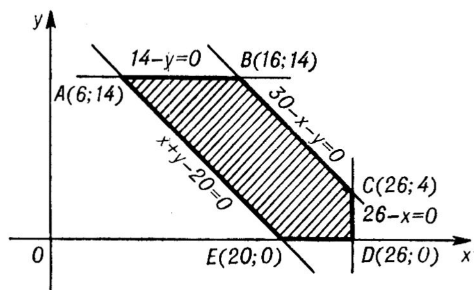
t.y.

$$S=288-4x-5y. \tag{1}$$

Kadangi į kiekvieną miesto rajoną atvežamos duonos kiekis negali būti neigiamas, tai visi II lentelės skaičiai turi būti neneigiami:

$$\begin{cases} x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \\ 30-x-y\geqslant 0, \\ 26-x\geqslant 0, \\ 14-y\geqslant 0, \\ x+y-20\geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Kainą S galime laikyti taško M, kurio koordinatės tenkina (2) nelygybes, funkcija. Visų tokių taškų aibė yra daugiakampis $ABCDE$ (4 pav.).



4 pav.

Sakykime, funkcija S įgyja reikšmę c kuriame nors daugiakampio $ABCDE$ taške M. Akivaizdu, kad tą pačią reikšmę ji įgyja visuose tiesės l, aprašomos lygtimi

$$288-4x-5y=c, \tag{3}$$

taškuose.

Kaina S yra lygi c ir tiesės l, ir daugiakampio $ABCDE$ krašto kirtimosi taškuose.

Akivaizdu, kad bet kuri tiesė, aprašyta lygtimi

$$288-4x-5y=c-\delta,$$

kai $\delta>0$ yra pakankamai mažas, taip pat eina per vidinius daugiakampio $ABCDE$ taškus, jeigu tik su kuria nors c reikšme (3) tiesė eina per vidinius daugiakampio $ABCDE$ taškus. Todėl tokia funkcijos S reikšmė negali būti minimali. Taigi funkcija mažiausią reikšmę įgyja (3) pavidalo lygtimi aprašytose tiesėse, kurios kertasi tik su daugiakampio kraštu.

Nesunku pastebėti, kad bet kokia tiesė, kuri kertasi tik su daugiakampio kraštu, būtinai eina per jo viršūnę. Iš to išplaukia, kad funkcija S įgyja mažiausią reikšmę kurioje nors daugiakampio $ABCDE$ viršūnėje.

Rasime S reikšmę kiekvienoje daugiakampio $ABCDE$ viršūnėje:

$$\begin{cases} S(A)=288-4\cdot 6-5\cdot 14=194, \\ S(B)=288-4\cdot 16-5\cdot 14=154, \\ S(C)=288-4\cdot 26-5\cdot 4=164, \\ S(D)=288-4\cdot 26=184, \\ S(E)=288-4\cdot 20=208. \end{cases}$$

Taigi mažiausia S reikšmė lygi 154, ir ji įgyjama taške B, t.y. kai $x=16$, $y=14$.

Vadinasi, ekonomiškiausią duonos pervežimo planą (programą) aprašysime šia lentele.

III lentelė

Kombinatas	Rajonas		
	1	2	3
Nr. 1	16	14	0
Nr. 2	10	0	10

Pastebėsime, kad didžiausia kainos S reikšmė lygi 208, ji įgyjama taške $E(20;\ 0)$, o ją atitinkantis pervežimo planas yra pats brangiausias. Pervežant pagal ekonomiškiausią planą, kasdien sutaupomi 54 rb, o per metus – apie 20 000 rb.

Išnagrinėjome paprasčiausią transporto uždavinį. Daugelis ekonomikos ir planavimo uždavinių yra panašaus pobūdžio; visi jie vadinami *tiesinio programavimo uždaviniais.*

Dabar suformuluosime tą uždavinį bendruoju atveju.

Sakykime, yra n cemento gamyklų ir m statybų. Gamyklas sunumeruokime skaičiais nuo 1 iki n, o statybas – nuo i iki m.

Tarkime, kad i-oji gamykla pagamina a_i, o j-oji statyba sunaudoja b_j tonų cemento. Vienos tonos cemento pervežimo iš i-osios gamyklos į j-ąją statybą kainą pažymėkime c_{ij}.

Reikia sudaryti tokį pervežimo planą (programą), kad pervežimo kaina būtų mažiausia.

Sakykime, gamyklos pagamina cemento tik tiek, kiek jo reikia statyboms, t.y.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=\sum_{j=1}^{m} b_j.$$

Pagal kokį nors planą iš i-osios gamyklos į j-ąją statybą pristatomo cemento kiekį pažymėkime x_{ij}. Tada

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \quad j=1, \ldots, m, \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij}=a_i, \quad i=1, \ldots, n. \tag{5}$$

Jeigu bendrąją visų pervežimų kainą pažymėsime S, tai

$$S=\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}. \tag{6}$$

Pervežimų $\{x_{ij}, i=1, \ldots, n; j=1, \ldots, m\}$ planą (programą) reikia taip parinkti, kad pervežimų kaina būtų mažiausia, t.y. iš visų (4), (5) lygčių sistemos neneigiamų sprendinių reikia imti tą, su kuriuo funkcija S įgyja mažiausią reikšmę.

(6) funkcija yra vadinama *tikslo funkcija*, (4), (5) lygybės ir nelygybės

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i=1, \ldots, n; \quad j=1, \ldots, m,$$

vadinamos *sąlygomis*.

Įrodysime, kad nagrinėjamąjį uždavinį galima pakeisti tokiu uždaviniu, kurio visos sąlygos išreiškiamos nelygybėmis.

Iš pirmųjų $m-1$ (4) pavidalo lygčių

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=b_j, \quad j=1, \ldots, m-1,$$

randame x_{nj}:

$$x_{nj}=b_j-\sum_{i=1}^{n-1} x_{ij}, \quad j=1, \ldots, m-1. \tag{7}$$

Analogiškai iš pirmųjų $n-1$ (5) pavidalo lygčių randame x_{im}:

$$x_{im}=a_i-\sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}, \quad i=1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Taigi

$$x_{nm}=a_n-\sum_{j=1}^{m-1} x_{nj}=a_n-\sum_{i=1}^{m-1} b_j+\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}.$$

Visą pagaminamo (ir sunaudojamo) cemento kiekį pažymėkime B:

$$B=\sum_{j=1}^{m} b_j=\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Tada

$$x_{nm}=-B+a_n+b_m+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} x_{ij},$$

arba

$$x_{nm}=-\beta+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}; \qquad (9)$$

čia $\beta=B-a_n-b_m$.

Įrašę gautąsias (7), (8) ir (9) reikšmes į kainos S formulę ir sutraukę panašiuosius narius, gausime

$$S=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} x_{ij}+A;$$

čia

$$\alpha_{ij}=c_{ij}-c_{nj}-c_{im}+c_{nm},$$

$$A=-\beta c_{nm}+\sum_{j=1}^{m-1} c_{nj} b_j+\sum_{i=1}^{n-1} c_{im} a_i.$$

Taigi, norint išrinkti ekonomiškiausią pervežimų planą, reikia išspręsti šitokį uždavinį: tarp visų neneigiamų skaičių

$$x_{ij} \quad (i=1, \ldots, n-1; j=1, \ldots, m-1),$$

tenkinančių nelygybes

$$b_j-\sum_{i=1}^{n-1} x_{ij}\geqslant 0, \quad j=1, \ldots, m-1, \qquad (10)$$

$$a_i-\sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}\geqslant 0, \quad i=1, \ldots, n-1, \qquad (11)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} x_{ij}-\beta\geqslant 0, \qquad (12)$$

reikia rasti tokius, kad funkcija

$$S=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{ij} x_{ij}+A$$

įgytų mažiausią reikšmę.

Bendrojo uždavinio nespręsime, tik išnagrinėsime kelis atskirus atvejus.

Jeigu $n=m=2$, tai

$$S=\alpha_{11}x_{11}+A_{1}, \qquad (13)$$

o (10), (11) ir (12) nelygybės atrodo šitaip:

$$\begin{cases} b_1 \ -x_{11}\geqslant 0, \\ a_1 \ -x_{11}\geqslant 0, \\ x_{11}-\beta \ \geqslant 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Kadangi visų $x_{11}>0$, tenkinančių (14) nelygybes, aibė yra atkarpa, o (13) tiesinė funkcija įgyja mažiausią reikšmę kuriame nors tos atkarpos gale, tai šiuo atveju uždavinys yra nesunkiai išsprendžiamas.

Jeigu, pavyzdžiui, $n=2$ ir $m=3$, tai

$$S=\alpha_{11}x_{11}+\alpha_{12}x_{12}+A,$$

o (10), (11) ir (12) nelygybės yra šitokios:

$$\begin{cases} b_1-x_{11}\geqslant 0, \\ b_2-x_{12}\geqslant 0, \\ a_1 \ -x_{11}-x_{12}\geqslant 0, \\ x_{11}+x_{12}- \ \beta\geqslant 0. \end{cases}$$

Atvejį, kai duoti konkretūs skaičiai, nagrinėjome, spręsdami duonos pervežimo uždavinį. Kai skaičiai yra kiti, sprendžiama analogiškai.

Pastebėsime, kad nagrinėtuose uždaviniuose tikslo funkcija yra tiesinė kintamųjų funkcija, o sąlygos yra tiesinės nelygybės arba lygtys. Todėl tokie uždaviniai vadinami tiesinio programavimo uždaviniais. Taigi išspręsti tiesinio programavimo uždavinį – tai rasti optimalią gamybinę programą, kai tikslo funkcija ir sąlygos yra tiesinės.

Pratimai

1. Apskaičiuokite antros eilės determinantus:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$; f) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$.

2. Apskaičiuokite determinantus:

a) $\begin{vmatrix} 4^{\frac{1}{2}} & 81^{-\frac{1}{4}} \\ \frac{1^{-4}}{3} & \sqrt{2^6} \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 8^{-\frac{1}{3}} & \sin 30^\circ \\ \log_{\sqrt{2}} 8 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \log_2 32 & \log_3 27 \\ \log_4 16 & \log_5 125 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} \sin 45^\circ & \operatorname{tg} 45^\circ \\ \operatorname{ctg} 45^\circ & \sin 45^\circ \end{vmatrix}$.

3. Įrodykite:

$$\begin{vmatrix} \log_4 2 & -\log_{81}\frac{1}{3} \\ 2\log_2\frac{1}{64} & \log_{\frac{1}{3}} 81 \end{vmatrix} = 1.$$

4. Išspręskite trigonometrines lygtis:

a) $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & \sin x \\ \operatorname{ctg} x & \cos x \end{vmatrix} = 0$; b) $\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \operatorname{tg} x & \operatorname{ctg} x \end{vmatrix} = 0.$

5. Remdamiesi determinantais, raskite tiesių, apibrėžtų lygtimis

$$\begin{cases} 3x+2y-13=0, \\ 4x-3y-\ 6=0, \end{cases}$$

kirtimosi taško koordinates.

6. Raskite tokią k reikšmę, kad sistemos

$$\begin{cases} 3x+4y=17, \\ 4x+4y=\ 4 \end{cases}$$

sprendinys būtų $x=3$, $y=2$.

7. Išspręskite lygtis:

a) $x^2+\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=0$; b) $x^2+\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ x & -4 \end{vmatrix}=0$;

c) $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} x^2-3 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5x & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 7x\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3.$

8. Įrodykite, kad $y'=0$, kai

$$y=\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x-3 & x-4 \end{vmatrix}.$$

9. Raskite funkcijos

$$y=\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \operatorname{tg} x & \operatorname{ctg} x \end{vmatrix}$$

išvestinę.

10. Naudodamiesi determinantais, išspręskite lygtis:

a) $\begin{cases} 3x-2y=\ 5, \\ 4x+\ y=14; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x+\ y=17, \\ 3x-5y=\ 7; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x-3y=16, \\ 2x+4y=22; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5x-2y-6=0, \\ 7x-5y-4=0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x+4y=9, \\ 2x-5y=6; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4x-3y-\ 7=0, \\ 8x-6y-14=0. \end{cases}$

11. Išspręskite homogeninių lygčių sistemas:

a) $\begin{cases} 3x+2y=0, \\ 5x-3y=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=0, \\ 6x-4y=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x-5y=0, \\ 7x+2y=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+7y=0, \\ 2x+15y=0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 4x-6y=0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x+5y=0, \\ 5x+3y=0. \end{cases}$

12. Naudodamiesi determinantais, raskite tiesių, apibrėžtų lygtimis

a) $\begin{matrix} 4x-3y-7=0, \\ 3x+2y-18=0; \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} 5x-4y-9=0, \\ 2x+3y-22=0, \end{matrix}$

kirtimosi taškų koordinates.

13. Išspręskite sistemą

$$\begin{cases} 2\sin\alpha\cdot x+3\cos\alpha\cdot y=6\sqrt{2}, \\ 4\sin\alpha\cdot x-5\cos\alpha\cdot y=\sqrt{2}, \end{cases}$$

kai $\alpha\in R$.

14. Apskaičiuokite determinantą

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

15. Apskaičiuokite determinantą

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 36 & 12 & 24 \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{vmatrix}.$$

16. Neskaičiuodami determinantų, įrodykite, kad

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 11 \\ 5 & 10 & 13 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 6 & 11 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

N u o r o d a. Remkitės determinantų savybėmis.

17. Išspręskite lygtis:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ x & -4 & 6 \\ -1 & x & -3 \end{vmatrix}=0;$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & x \end{vmatrix}=9;$ c) $\begin{vmatrix} x & -4 & 6 \\ 2 & -2x & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}=0.$

18. Išspręskite lygtis:

a) $\begin{vmatrix} x & -3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-8=0;$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & x^2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -5 & x \\ 3 & 4 \end{vmatrix}+8\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=0.$

19. Įrodykite, kad

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy.$$

20. Išspręskite sistemą

$$\begin{cases} 3x - y + z - 4 = 0, \\ x + 2y - z - 4 = 0, \\ 2x + y + 2z - 16 = 0. \end{cases}$$

21. Įrodykite, kad

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 1 & \sin^2\beta & \cos^2\beta \\ 1 & \sin^2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

22. Raskite plotą trikampio, kurio viršūnės yra $A\,(2;\,5)$, $B\,(-4;\,3)$, $C\,(3;\,0)$.

23. Įrodykite, kad

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2).$$

24. Ištirkite, ar sistema

$$\begin{cases} 3x + 4y + 1 = 0, \\ 2x - 5y - 30 = 0, \\ 4x + 2y - 12 = 0 \end{cases}$$

turi sprendinių.

25. Nustatykite, ar tiesė, aprašyta lygtimi

$$4x - 5y - 1 = 0,$$

eina per tiesių, aprašytų lygtimis

$$2x + 3y - 17 = 0,$$

$$x + 2y - 10 = 0,$$

kirtimosi tašką.

26. Išspręskite lygtį

$$\begin{vmatrix} x^3 - 1 & x^2 - 1 & x - 1 \\ x^3 - 8 & x^2 - 4 & x - 2 \\ x^3 - 27 & x^2 - 9 & x - 3 \end{vmatrix} = 0.$$

27. Raskite šių funkcijų išvestines:

$$\text{a) } y = \begin{vmatrix} 0 & x & x \\ x & 0 & x \\ x & x & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{b) } y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

28. Apskaičiuokite determinantą

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}.$$

29. Išspręskite homogeninių lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$$

30. Išspręskite sistemą

$$\begin{cases} x+2y+3z-13=0, \\ 3x+2y+2z-16=0, \\ 4x-2y-5z+5=0. \end{cases}$$

31. Išspręskite sistemą

$$\begin{cases} 3x+4y-z-u=3, \\ 2x-y-2z+2u=9, \\ x+3y+5z-4u=2, \\ 4x-8y-3z+3u=10. \end{cases}$$

32. Išspręskite sistemą

$$\begin{cases} x-(\alpha-1)y=1, \\ \alpha x-2y=4-\alpha, \quad \alpha\in \mathbf{R}. \end{cases}$$

33. Išspręskite sistemas:

a) $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=6, \\ 2x_1-x_2+3x_3=11, \\ 4x_1+x_2-5x_3=9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=2, \\ 2x_1+x_2-4x_3=9, \\ 6x_1-5x_2+2x_3=17; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=9; \\ 2x_1-x_2+3x_3=13, \\ 3x_1+2x_2-5x_3=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x_1+x_2-3x_3=-1, \\ x_1-3x_2+2x_3=10, \\ 3x_1-4x_2-x_3=5. \end{cases}$

34. Su kokiomis α reikšmėmis lygčių sistema

$$\begin{cases} (\alpha-1)x-4y=11+\alpha, \\ -x+(x+2)y=2 \end{cases}$$

turi vienintelį sprendinį, du sprendinius ir neturi sprendinių?

35. Du duonos kombinatai kepa duoną trims gyvenvietėms. Kombinatas Nr. 1 kasdien iškepa 40 t, kombinatas Nr. 2 – 20 t. Gyvenvietėje Nr. 1 kasdien suvartojama 30 t duonos, gyvenvietėje Nr. 2 – 20 t, gyvenvietėje Nr. 3 – 10 t. Vienos tonos pristatymo iš kiekvieno kombinato į kiekvieną gyvenvietę kaina rubliais pateikta lentelėje.

Kombinatas	Gyvenvietė		
	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3
Nr. 1	3	4	5
Nr. 2	3	5	2

Sudarykite ekonomiškiausią duonos pervežimo planą.

II SKYRIUS

Kompleksiniai skaičiai

§ 7. KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ APIBRĖŽIMAS

1. Pradinės pastabos. Daugelyje matematikos ir jos taikymo sričių vien realiųjų skaičių neužtenka, todėl reikia apibendrinti skaičiaus sąvoką ir apibrėžti kompleksinių skaičių aibę, kuri yra platesnė už realiųjų skaičių aibę.

Pati idėja praplėsti nagrinėjamųjų skaičių aibę nėra nauja: matematikoje dažnai taip daroma. Skaičiaus sąvoka kinta priklausomai nuo uždavinių, kuriuos reikia spręsti. Atskiriems daiktams suskaičiuoti užtenka natūrinių skaičių, o norint išspręsti lygtį $px+q=0$, kai $p\in N$, $q\in N$, natūrinių skaičių neužtenka – reikia racionaliųjų skaičių. Savo ruožtu, matuojant atkarpų ilgius, jau neužtenka racionaliųjų skaičių. Norint išmatuoti bet kokią atkarpą, reikia prie racionaliųjų skaičių prijungti iracionaliuosius, t.y. reikia realiųjų skaičių. Operuojant vien racionaliaisiais skaičiais, negalima išspręsti lygties $x^2-2=0$, nes racionaliųjų skaičių aibėje ši lygtis neturi sprendinių.

Tačiau, sprendžiant algebrines lygtis, jau neužtenka ir realiųjų skaičių. Juk realiųjų skaičių aibėje kvadratinės lygtys su neigiamu diskriminantu, net paprasčiausios kvadratinės lygtys su natūriniais koeficientais, pavyzdžiui, $x^2+1=0$, $x^2+x+1=0$, sprendinių neturi.

Jeigu kaskart, sprendžiant vis sudėtingesnius uždavinius, reikėtų apibrėžti vis sudėtingesnius skaičius, būtų labai keblu. Laimei, taip nėra. Algebrinių lygčių teorijoje bendresnių už kompleksinius skaičių nereikia*. Įrodyta, kad kompleksinių skaičių aibei priklauso visi kiekvienos kvadratinės ir bet kokio laipsnio lygties su realiaisiais arba kompleksiniais koeficientais sprendiniai.

Kompleksiniai skaičiai dažnai yra vadinami menamaisiais, bet šis pavadinimas nėra vykęs, nes galima pagalvoti, kad kompleksiniai skaičiai yra nerealūs. Šį pavadinimą galima paaiškinti šitaip. Kompleksiniai skaičiai buvo vartojami jau XVI a., bet netgi žymiesiems matematikams jie ilgą laiką atrodė nerealūs, menami tikrąja to žodžio prasme. Vienas iš diferencialinio ir integralinio skaičiavimo kūrėjų, vokiečių matematikas

* Tokie skaičiai egzistuoja – tai vadinamieji hiperkompleksiniai skaičiai, jie vartojami, nagrinėjant kai kuriuos geometrijos (ypač neeuklidinės) ir mechanikos klausimus.

G. Leibnicas (1646–1716) yra pasakęs: „Kompleksinis skaičius yra subtili ir stebėtina dieviškosios dvasios priemonė, beveik amfibija tarp būties ir nebūties". Dabar iš tos mistikos neliko beveik nieko, išskyrus galbūt pavadinimą „menamieji skaičiai". Jau K. Gauso (1777–1855) laikais buvo pradėta kompleksinius skaičius interpretuoti kaip plokštumos taškus. Remdamiesi kompleksiniais skaičiais, žymiausieji XIX a. matematikai O. Koši, G. Rymanas ir K. Vejerštrasas sukūrė vieną iš gražiausių matematinių disciplinų – kompleksinio kintamojo funkcijų teoriją.

Prieš apibrėždami kompleksinius skaičius, aptarsime kai kuriuos klausimus: kokiomis savybėmis turi pasižymėti naujieji skaičiai, kokius veiksmus reikėtų apibrėžti, kokius dėsnius turėtų tenkinti apibrėžtieji veiksmai?

Iš pradžių pastebėsime, kad natūrinių skaičių aibės plėtinys – sveikųjų skaičių aibė, sveikųjų skaičių aibės plėtinys – racionaliųjų skaičių aibė, racionaliųjų skaičių aibės plėtinys – realiųjų skaičių aibė pasižymėdavo tuo, kad pradinė aibė būdavo plėtinio poaibis. Ta sąlyga turi būti ir apibrėžiant kompleksinius skaičius. Realiųjų skaičių aibė turės būti kompleksinių skaičių aibės poaibis.

Naujiesiems skaičiams reikės apibrėžti lygybės sąvoką, sudėties ir daugybos veiksmus, kurie turės tenkinti komutatyvumo, asociatyvumo ir distributyvumo dėsnius. Tuo atveju, kai kompleksiniai skaičiai sutapo su realiaisiais, naujieji sudėties ir daugybos veiksmai turės sutapti su jau žinomais realiųjų skaičių sudėties ir daugybos veiksmais.

Kadangi norime, kad kompleksinių skaičių aibėje lygtis $x^2+1=0$ turėtų sprendinį, tai reikia apibrėžti tam tikrą naują skaičių ir laikyti jį tos lygties sprendiniu. Tą naująjį skaičių žymėsime simboliu (raide) i. Taigi skaičius i tenkina lygtį $i^2+1=0$; kadangi norime, kad lygybės su naujaisiais skaičiais būtų pertvarkomos taip pat, tai

$$i^2=-1.$$

Toliau realiųjų skaičių aibę papildysime naujais skaičiais bi, kuriuos vadinsime menamais ir laikysime realiųjų skaičių b ir skaičiaus i sandaugomis. Realiojo skaičiaus a ir menamojo skaičiaus bi sumą žymėsime $a+bi$.

Sudėtį žymėsime ženklu „+", o užrašydami sandaugą, daugiklius rašysime greta vienas kito ir daugybos ženklo – taško nedėsime. Kompleksinių skaičių lygybę žymėsime ženklu „=".

Skaičių a_1+b_1i ir a_2+b_2i sudėtį natūralu apibrėžti šitaip:

$$(a_1+b_1 i)+(a_2+b_2 i)=a_1+a_2+(b_1+b_2) i.$$

Dviejų kompleksinių skaičių a_1+b_1i ir a_2+b_2i daugybą apibrėšime taip, kad galėtume ją atlikti pagal įprastinę dvinarių daugybos taisyklę.

Remdamiesi ta taisykle, gausime

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=a_1 a_2+a_1 b_2 i+a_2 b_1 i+b_1 b_2 i^2$$

arba, atsižvelgę į lygybę $i^2=-1$,

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=a_1 a_2-b_1 b_2+(a_1 b_2+a_2 b_1) i.$$

Vadinasi, realiųjų skaičių aibė turi būti naujosios skaičių aibės poaibis; toje aibėje turi būti apibrėžti sudėties ir daugybos veiksmai, tenkinantys įprastinius algebros dėsnius; apibrėžtieji veiksmai neturi prieštarauti realiųjų skaičių sudėties ir daugybos veiksmams. Tolesniame skirsnyje įrodysime, kad visus tuos reikalavimus galima išpildyti.

2. Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas. Kompleksinių skaičių veiksmų savybės. *Kompleksiniais skaičiais* vadinsime reiškinius $a+bi$ (a ir b – realieji skaičiai, i – tam tikras simbolis), kurių lygybės sąvoką ir sudėties bei daugybos veiksmus apibrėšime šitaip:

a) du kompleksiniai skaičiai a_1+b_1i ir a_2+b_2i yra lygūs tada ir tik tada, kai $a_1=a_2$, $b_1=b_2$;

b) skaičių a_1+b_1i ir a_2+b_2i suma yra skaičius

$$a_1+a_2+(b_1+b_2)\,i;$$

c) skaičių a_1+b_1i ir a_2+b_2i sandauga yra skaičius

$$a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)\,i.$$

Vadinasi, kompleksiniai skaičiai sudedami ir dauginami pagal formules

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=a_1+a_2+(b_1+b_2)\,i, \tag{1}$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)\,i. \tag{2}$$

Paprastai kompleksiniai skaičiai žymimi viena raide, dažniausiai z arba w, kartais su indeksais, pavyzdžiui, z_1, z_2, w_0. Lygybė $z=a+bi$ reiškia, kad kompleksinis skaičius $a+bi$ yra pažymėtas raide z.

Nesunkiai įsitikintume, kad apibrėžtieji sudėties (1) ir daugybos (2) veiksmai pasižymi šiomis savybėmis.

1. Sudėties komutatyvumas:

$$z_1+z_2=z_2+z_1.$$

2. Sudėties asociatyvumas:

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

3. Bet kuriems kompleksiniams skaičiams z_1 ir z_2 egzistuoja toks kompleksinis skaičius z, kad $z_1+z=z_2$. Tas skaičius vadinamas skaičių z_2 ir z_1 *skirtumu* ir žymimas z_2-z_1.

4. Daugybos komutatyvumas:

$$z_1z_2=z_2z_1.$$

5. Daugybos asociatyvumas:

$$(z_1z_2)\,z_3=z_1(z_2z_3).$$

6. Bet kuriems kompleksiniams skaičiams $z_1\neq 0+0i$ ir z_2 egzistuoja toks skaičius z, kad $z_1z=z_2$. Tas skaičius vadinamas kompleksinių skaičių z_2 ir z_1 *dalmeniu* ir žymimas $\frac{z_2}{z_1}$. Dalybos iš kompleksinio skaičiaus $0+0i$, vadinamo *nuliu*, neapibrėšime.

7. Distributyvumas:

$$z_1(z_2+z_3)=z_1 z_2+z_1 z_3.$$

Minėtosios sudėties ir daugybos veiksmų savybės išplaukia iš tuos veiksmus apibrėžiančių (1) ir (2) formulių ir kompleksinių skaičių lygybės apibrėžimo. Įrodysime 3, 6, 7 savybes; kitas savybes rekomenduojame moksleiviams įrodyti savarankiškai.

3 savybės įrodymas. Jeigu $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ ir $z=x+yi$, tai lygybę $z_1+z=z_2$ galime užrašyti šitaip:

$$(a_1+b_1 i)+(x+yi)=a_2+b_2 i.$$

Remiantis (1) formule,

$$a_1+x+(b_1+y)\,i=a_2+b_2 i,$$

taigi x ir y turi tenkinti dviejų lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_1+x=a_2, \\ b_1+y=b_2. \end{cases}$$

Ta sistema turi vienintelį sprendinį $x=a_2-a_1$, $y=b_2-b_1$.

Taigi kompleksinių skaičių z_2 ir z_1 skirtumas visada egzistuoja ir

$$z_2-z_1=(a_2-a_1)+(b_2-b_1)\,i. \tag{3}$$

Pagal (3) formulę randamas kompleksinių skaičių skirtumas.

6 savybės įrodymas. Jeigu $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ ir $z=x+yi$, tai lygybę $z_1z=z_2$ galime užrašyti šitaip:

$$(a_1+b_1 i)(x+yi)=a_2+b_2 i.$$

Remiantis (2) formule,

$$a_1 x-b_1 y+(a_1 y+b_1 x)\,i=a_2+b_2 i,$$

taigi x ir y turi tenkinti dviejų tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_1 x-b_1 y=a_2, \\ b_1 x+a_1 y=b_2. \end{cases}$$

Tos sistemos determinantas

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{vmatrix}=a_1^2+b_1^2$$

nelygus nuliui, nes $a_1+b_1i\neq 0+0i$. Todėl sistema turi vienintelį sprendinį:

$$x=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_1^2+b_1^2}, \quad y=\frac{a_1 b_2-a_2 b_1}{a_1^2+b_1^2}.$$

Taigi dviejų kompleksinių skaičių dalmuo visada egzistuoja, kai daliklis nelygus nuliui, ir

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_1^2+b_1^2}+\frac{a_1 b_2-a_2 b_1}{a_1^2+b_1^2}\,i. \tag{4}$$

Pagal (4) formulę randamas kompleksinių skaičių dalmuo.

7 savybės įrodymas. Jeigu $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, $z_3=a_3+b_3i$, tai

$$z_1(z_2+z_3)=(a_1+b_1i)\big(a_2+a_3+(b_2+b_3)i\big)=$$
$$=a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)+\big(b_1(a_2+a_3)+a_1(b_2+b_3)\big)i=$$
$$=a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)i;$$
$$z_1z_2+z_1z_3=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i)=$$
$$=a_1a_2-b_1b_2+(a_1b_2+b_1a_2)i+a_1a_3-b_1b_3+(a_1b_3+b_1a_3)i=$$
$$=a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3+(b_1a_2+b_1a_3+a_1b_2+a_1b_3)i.$$

Taigi $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

Iš 1–7 savybių išplaukia, kad kompleksinių ir realiųjų skaičių sudėtis ir daugyba tenkina tuos pačius dėsnius.

Be to, apibrėžtieji sudėties ir daugybos veiksmai leidžia nagrinėti kompleksinius skaičius, kaip realiųjų skaičių bendresnį atvejį, o realiuosius skaičius – kaip atskirą kompleksinių skaičių atvejį. Kad tuo įsitikintume, panagrinėkime tik pavidalo $a+0i$ kompleksinius skaičius.

Iš (1)–(4) formulių aišku, kad sudėjus, padauginus, atėmus ir padalijus tokius skaičius, gaunami tokio pat pavidalo skaičiai. Be to, veiksmų su kompleksiniais skaičiais $a+0i$ taisyklės yra visiškai tokios pat, kaip ir atitinkamų veiksmų su realiaisiais skaičiais. Todėl kompleksinį skaičių $a+0i$ galima sutapatinti su realiuoju skaičiumi a ir laikyti $a+0i=a$. Pavyzdžiui, $0+0i=0$, $1+0i=1$, $-1+0i=-1$.

Taigi realiųjų skaičių aibė yra kompleksinių skaičių aibės poaibis.

Beje, skaičiai $0+bi$ yra vadinami *grynai menamais* ir žymimi bi.

Pavyzdžiui, $0-2i=-2i$, $0+1i=i$.

Realųjį skaičių a vadinsime kompleksinio skaičiaus $a+bi$ *realiąja dalimi*, o realųjį skaičių b – to skaičiaus *menamąja dalimi*.

Kompleksinį skaičių i vadinsime *menamuoju vienetu*.

Remiantis kompleksinių skaičių apibrėžimu, du skaičiai $z_1=a_1+b_1i$ ir $z_2=a_2+b_2i$ yra lygūs tada ir tik tada, kai $a_1=a_2$, $b_1=b_2$, t.y. kai tų skaičių ir realiosios, ir menamosios dalys yra lygios. Pastebėsime, kad viena kompleksinių skaičių lygybė $z_1=z_2$ yra lygiavertė dviem realiųjų skaičių lygybėms $a_1=a_2$, $b_1=b_2$. Be to, kompleksiniams skaičiams neapibrėžtos sąvokos „daugiau“ ir „mažiau“. Taigi reiškiniai $z>0$, $1+i<2$ ir į juos panašūs neturi prasmės.

Vėl nagrinėsime (2) formulę, apibrėžiančią kompleksinių skaičių daugybą. Paėmę joje $a_1=a_2=0$, $b_1=b_2=1$, gausime svarbų sąryšį $ii=-1$ arba sandaugą ii pažymėję i^2,

$$i^2=-1.$$

Taigi, apibrėžus daugybą (2) formule, lygtis $x^2+1=0$ turi sprendinį.

Beje, (2) formulės įsiminti nereikia, nes ją gauname, formaliai sudauginę dvinarius a_1+b_1i ir a_2+b_2i ir po to pagal (5) formulę i^2 pakeitę -1.

1 pavyzdys. Rasime kompleksinių skaičių $z_1=2+5i$ ir $z_2=-1+7i$ sumą ir sandaugą.

Remiantis (1) formule,

$$z_1+z_2=(2+5i)+(-1+7i)=1+12\,i.$$

Sandaugą rasime, formaliai sudauginę dvinarius $2+5i$ ir $-1+7i$ ir atsižvelgę į (5) sąryšį:

$$z_1 z_2=(2+5i)(-1+7i)=-2+14i-5i+35i^2=-37+9i.$$

2 pavyzdys. Rasime kompleksinių skaičių $z_1=x+yi$ ir $z_2=x-yi$ sumą ir sandaugą.

Pagal (1) formulę

$$z_1+z_2=(x+yi)+(x-yi)=2x.$$

Remiantis dvinarių daugybos taisykle,

$$z_1 z_2=(x+yi)(x-yi)=x^2-xyi+xyi-y^2 i^2=x^2+y^2.$$

Skaičiai $x+yi$ ir $x-yi$, kurie vienas nuo kito skiriasi tik menamosios dalies ženklu, vadinami *jungtiniais kompleksiniais skaičiais.* Skaičiaus z jungtinis žymimas $\bar{z}$. Iš 2 pavyzdžio išplaukia, kad jungtinių skaičių suma $z+\bar{z}$ visada yra realusis skaičius, o sandauga $z\bar{z}$ — realusis neneigiamas skaičius.

3 pavyzdys. Rasime kompleksinių skaičių $z_1=-1+6i$ ir $z_2=2+5i$ skirtumą z_2-z_1 ir dalmenį $\frac{z_2}{z_1}$.

Pagal (3) formulę

$$z_2-z_1=(2+5i)-(-1+6i)=3-i.$$

Remiantis (4) formule,

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{2+5i}{-1+6i}=\frac{(-1)\cdot 2+6\cdot 5}{(-1)^2+6^2}=\frac{(-1)\cdot 5-2\cdot 6}{(-1)^2+6^2}\,i=\frac{28}{37}-\frac{17}{37}\,i.$$

Sekančiame skirsnyje nurodysime paprastesnį kompleksinių skaičių dalybos būdą, kurį taikant nereikės prisiminti (4) formulės.

4 pavyzdys. Rasime kompleksinį skaičių

$$z=\frac{(1+i)(1-2i)}{3+i}.$$

Sudauginę skaitiklio skaičius, gausime

$$z=\frac{(1+i)(1-2i)}{3+i}=\frac{1-2i+i-2i^2}{3+i}=\frac{3-i}{3+i}.$$

Dabar būtų galima remtis (4) formule, bet yra patogesnis būdas. Trupmenos $\frac{3-i}{3+i}$ skaitiklį ir vardiklį dauginsime iš vardikliui jungtinio skaičiaus, t.y. iš $3-i$:

$$z=\frac{3-i}{3+i}=\frac{(3-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{9-3i-3i+i^2}{9+1}=\frac{8-6i}{10}=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\,i.$$

Pratimai

1. Raskite kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 sumą ir sandaugą:

a) $z_1=5+4i, \quad z_2=-2+3i;$

b) $z_1=0{,}5-3{,}2i, \quad z_2=1{,}5-0{,}8i;$

c) $z_1=-8-7i, \quad z_2=-3i;$

d) $z_1=5+\sqrt{3}\,i, \quad z_2=5-\sqrt{3}\,i.$

2. Raskite skirtumą z_2-z_1 ir dalmenį $\frac{z_2}{z_1}$, kai:

a) $z_1=1+i \quad z_2=1-i;$

b) $z_1=1+2i, \quad z_2=5;$

c) $z_1=-1+\sqrt{3}\,i, \quad z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i;$

d) $z_1=a-\sqrt{b}\,i, \quad z_2=a+\sqrt{b}\,i.$

3. Apskaičiuokite:

a) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\,i\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\,i\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)i;$

b) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i};$

c) $2i\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right);$

d) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2i}\right)^2;$

e) $i^{13}+i^{14}+i^{15}+i^{16}.$

4. Raskite kompleksinio skaičiaus realiąją dalį:

a) $z=\frac{(1+2i)^3}{i}+i^{19};$

b) $z=\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}+\frac{1}{i}.$

5. Raskite kompleksinio skaičiaus menamąją dalį:

a) $z=(2-i)^3(2+11\,i);$

b) $z=\frac{2-3i}{1+4i}+i^6.$

6. Raskite kompleksinius skaičius:

a) $z=i+\frac{6i+1}{1-7i};$

b) $z=\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2};$

c) $z=(2+i)^5;$

d) $z=\frac{5+12i}{8-6i}+\frac{(1+2i)^2}{2+i}.$

7. Išspręskite lygtis:

a) $(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i$,

b) $z^2+\bar{z}=0$

8. Kokios turi būti realiosios x ir y reikšmės, kad kompleksiniai skaičiai $z_1=x^2-7x+9yi$ ir $z_2=y^2i+20i-12$ būtų lygūs?

9. Kokios turi būti realiosios x ir y reikšmės, kad kompleksiniai skaičiai $z_1=9y^2-4-10xi$ ir $z_2=8y^2+20i^7$ būtų lygūs?

10. Įrodykite lygybes:

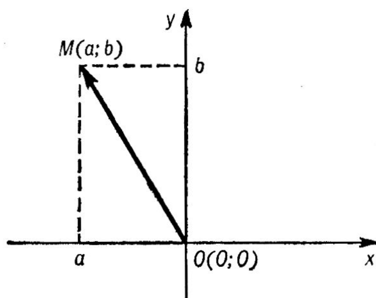
a) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, b) $\overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$.

11. Išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} z_1+2z_2=1+i, \\ 3z_1+iz_2=2-3i. \end{cases}$$

§ 8. KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ GEOMETRINIS VAIZDAVIMAS. KOMPLEKSINIO SKAIČIAUS MODULIS IR ARGUMENTAS

1. Kompleksinė plokštuma. Gerai žinome, kad tarp realiųjų skaičių ir tiesės taškų aibių galima nustatyti abipus vienareikšmę atitiktį. Tokia atitiktis algebroje ir analizėje leidžia remtis geometriniais vaizdiniais. Nagrinėdami kompleksinius skaičius, taip pat galėsime sėkmingai vartoti geometrijos terminus ir geometrinius vaizdinius, jeigu tik pavyks nustatyti abipus vienareikšmę atitiktį tarp kompleksinių skaičių aibės ir koordinačių plokštumos taškų aibės. Tą atitiktį apibrėšime šitaip. Kiekvienam kompleksiniam skaičiui $a+bi$ priskirsime koordinačių plokštumos tašką M $(a; b)$, t.y. tašką, kurio abscisė yra kompleksinio skaičiaus realioji dalis, o ordinatė – jo menamoji dalis. Kiekvienam koordinačių plokštumos taškui



5 pav.

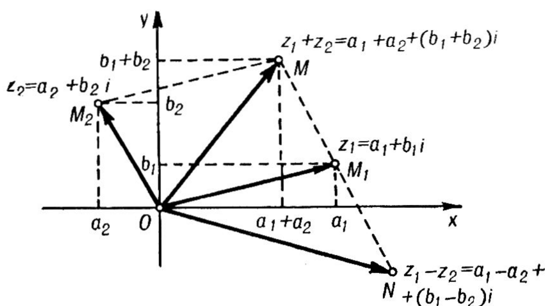
M $(a; b)$ priskirsime kompleksinį skaičių $a+bi$ (5 pav.). Akivaizdu, kad apibrėžtoji atitiktis yra abipus vienareikšmė. Ja remiantis, kompleksinius skaičius galima interpretuoti kaip taškus tam tikros plokštumos, kurioje yra pasirinkta koordinačių sistema. Tada pati koordinačių plokštuma

yra vadinama *kompleksine plokštuma*. Abscisių ašis vadinama *realiąja ašimi*, nes jos taškai atitinka kompleksinius skaičius $a+0i$, t.y. realiuosius skaičius, o ordinačių ašis – *menamąja ašimi*, nes jos taškai atitinka grynai menamus kompleksinius skaičius $0+bi$.

Ne mažiau svarbi ir patogi kompleksinio skaičiaus $a+bi$ interpretacija vektoriumi $\overrightarrow{OM}$ (žr. 5 pav.), t.y. vektoriumi, kurio pradžia yra koordinačių pradžia $O(0; 0)$, o galas – taškas $M(a; b)$. Žinoma, vietoj vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ galima imti bet kurį jam lygų vektorių. Akivaizdu, kad kiekvieną plokštumos vektorių, kurio pradžia yra taškas $O(0; 0)$, o galas – taškas $M(a; b)$, atitinka kompleksinis skaičius $a+bi$, ir atvirkščiai. Nulinį vektorių atitinka kompleksinis skaičius $0+0i$.

Taigi nustatėme atitiktį tarp kompleksinių skaičių aibės ir plokštumos taškų arba vektorių aibės; ja remdamiesi, kompleksinius skaičius galime vadinti taškais arba vektoriais ir, pavyzdžiui, sakyti „vektorius $a+bi$" arba „taškas $a+bi$".

Kompleksinius skaičius vaizduojant vektoriais, labai paprasta geometriškai paaiškinti veiksmus su tais skaičiais. Kol kas nagrinėsime tik kompleksinių skaičių sudėtį ir atimtį. Geometriškai daugybos prasmę paaiškinsime vėliau.



6 pav.

Sudedant skaičius $z_1=a_1+b_1i$ ir $z_2=a_2+b_2i$, sudedamos jų realiosios ir menamosios dalys (6 pav.). Sudedant juos atitinkančius vektorius $\overrightarrow{OM_1}$ ir $\overrightarrow{OM_2}$, sudedamos jų koordinatės. Todėl, remiantis kompleksinių skaičių ir vektorių atitiktimi, skaičių z_1 ir z_2 sumą z_1+z_2 atitiks vektorius $\overrightarrow{OM}$ – vektorių $\overrightarrow{OM_1}$ ir $\overrightarrow{OM_2}$ suma. Taigi kompleksinių skaičių sumą geometriškai galima interpretuoti kaip tuos kompleksinius skaičius atitinkančių vektorių sumos vektorių. Visiškai analogiškai nustatoma, kad skaičių skirtumą z_1-z_2 atitinka vektorių skirtumo $\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}$ vektorius $\overrightarrow{M_2M_1}$ (arba $\overrightarrow{ON}$) (6 pav.).

1. Nubrėžkite vektorius: $z=3+2i$, $z=5-4i$, $z=-6+3i$, $z=-1-i$, $z=\cos 30° - i\sin 30°$, $z=\cos 150°+i\sin 150°$, $z=-2$, $z=i$.

2. Kompleksiniai skaičiai z_1, z_2, z_3 yra tam tikro kompleksinės plokštumos lygiagretainio viršūnės. Raskite ketvirtąją jo viršūnę.

3. $z_1=6+8i$ ir $z_2=4-3i$ yra kompleksinės plokštumos taškai. Raskite kompleksinius skaičius, atitinkančius vektorių z_1 ir z_2 sudaryto kampo pusiaukampinės taškus.

2. Kompleksinio skaičiaus modulis. Apibrėšime kompleksinio skaičiaus modulio sąvoką.

Apibrėžimas. *Kompleksinio skaičiaus moduliu* yra vadinamas tą skaičių atitinkančio vektoriaus ilgis.

Skaičiaus z modulis žymimas $|z|$. Taip pat dažnai modulis žymimas raide r. Remiantis Pitagoro teorema (žr. 5 pav.), kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ modulis yra lygus

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ši formulė išreiškia skaičiaus modulį jo realiąja ir menamąja dalimis.

Realiojo skaičiaus $z=a+0i$ modulis sutampa su jo absoliutiniu didumu $|z|=|a+0i|=\sqrt{a^2}=|a|$.

Akivaizdu, kad jungtinių skaičių $z=a+bi$ ir $\bar{z}=a-bi$ moduliai yra lygūs.

Rezultatą, gautą, išsprendus 7 paragrafo 2 pavyzdį, dabar galime užrašyti šitaip:

$$z\cdot\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2,$$

t.y. *jungtinių skaičių sandauga yra lygi jų modulio kvadratui.*

Pastebėsime, kad, dalijant kompleksinius skaičius, 7 paragrafo (4) formulės galima ir neprisiminti.

Remiantis sąryšiu

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}=\frac{z_2\bar{z}_1}{|z_1|^2},$$

skaičių z_2 galima padalyti iš z_1 šitaip: skaičių z_2 reikia padauginti iš $\bar{z}_1$ ir gautąją sandaugą padalyti iš realaus teigiamo skaičiaus $|z_1|^2$. Taip jau darėme 7 paragrafo (2 skirsnio) 4 pavyzdyje. Tuo būdu išspręsime dar vieną pavyzdį.

1 pavyzdys. Raskime dalmenį $\frac{i-1}{4-5i}$.

Skaitiklį ir vardiklį padauginę iš vardikliui jungtinio skaičiaus, gausime

$$\frac{i-1}{4-5i}=\frac{(i-1)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{4i+5i^2-4-5i}{16+25}=-\frac{9}{41}-\frac{1}{41}i.$$

Baigdami šį skirsnį, išsiaiškinsime dviejų kompleksinių skaičių skirtumo modulio geometrinę prasmę.

Remiantis modulio apibrėžimu, $|z_1 - z_2|$ yra vektoriaus $z_1 - z_2$ ilgis. Vektorius $z_1 - z_2$ pavaizduotas 6 paveiksle. Tai yra vektorius $\overrightarrow{ON}$; jo ilgis – atstumas tarp taškų M_1 ir M_2. Vadinasi, *dviejų kompleksinių skaičių skirtumo modulis yra atstumas tarp tuos skaičius atitinkančių kompleksinės plokštumos taškų.* Tokia dviejų kompleksinių skaičių skirtumo modulio traktuotė sprendžiant kai kuriuos uždavinius, leidžia remtis paprastais geometrijos faktais.

2 pavyzdys. Raskime kompleksinės plokštumos taškų aibes, apibrėžtas sąlygomis:

a) $|z-1-i| = |z+1+i|$,

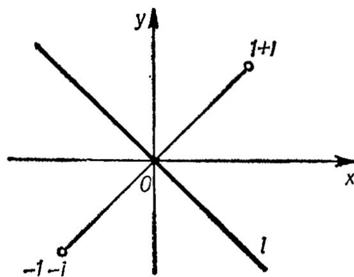
b) $|z+i| = 1$,

c) $1 \leqslant |z+2| \leqslant 2$.

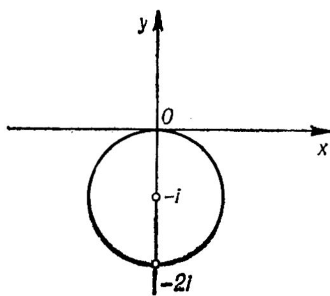
a) Sąlygą

$$|z-(1+i)| = |z-(-1-i)|$$

tenkina tie ir tik tie kompleksinės plokštumos taškai, kurie yra vienodai nutolę nuo taškų $z_1 = 1+i$ ir $z_2 = -1-i$. Plokštumos taškų, vienodai nu-



7 pav.



8 pav.

tolusių nuo dviejų duotųjų taškų, aibė yra tiesė, statmena tuos taškus jungiančiai atkarpai ir einanti per tos atkarpos vidurio tašką. Ieškomoji aibė – tiesė l, pavaizduota 7 paveiksle.

b) Sąryšį

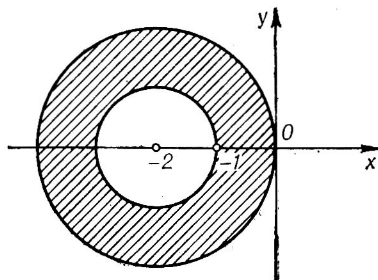
$$|z+i| = 1$$

tenkina tik tie kompleksiniai plokštumos taškai, kurių atstumas iki taško $z_1 = -i$ lygus vienetui. Tokie taškai sudaro apskritimą, kurio spindulys yra vienetas ir centras – taškas $z_1 = -i$ (8 pav.).

c) Remiantis dviejų kompleksinių skaičių skirtumo modulio geometrine interpretacija, kompleksiniai skaičiai z, tenkinantys sąlygą

$$1 \leqslant |z+2| \leqslant 2,$$

yra viduje ir krašte žiedo, apibrėžto dviejų koncentrinių apskritimų, kurių centras yra taškas $z_1=-2$, o spinduliai, atitinkamai lygūs 1 ir 2. Ieškomoji taškų aibė yra užbrūkšniuota 9 paveiksle.



9 pav.

Pratimai

4. Raskite kompleksinio skaičiaus modulį:

a) $z=-3$, b) $z=-i$, c) $z=7$, d) $z=1-i$,

e) $z=\cos\pi+i\sin\pi$, f) $z=-5-2\sqrt{6}\,i$.

5. Išspręskite lygtis:

a) $|z|-iz=1-2i$,

b) $z^2+3|z|=0$,

c) $z^2+|z|^2=0$.

6. Išspręskite lygčių sistemą

$|z+1-i|=|3+2i-z|=|z+i|$.

7. Raskite aibes kompleksinės plokštumos taškų, tenkinančių sąlygas:

a) $|z|\leqslant 1$,

b) $|z|=2$,

c) $|z-i|\leqslant 0$,

d) $|z+2|<|z-2|$,

e) $|z+1|<|z-i|$,

f) $|z+2i-1|\leqslant 2$,

g) $2\leqslant|z-1+2i|<3$,

h) $\sin|z|>0$,

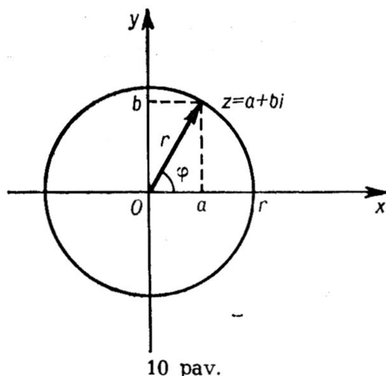
i) $\lg|z-10i|<1$,

j) $|z|^2+3z+3\bar{z}=0$.

8. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} |z+1|=|z+2|, \\ |3z+9|=|5z+10i|. \end{cases}$$

3. Kompleksinio skaičiaus argumentai. Akivaizdu, kad kompleksiniai skaičiai z, kurių modulis yra tas pats skaičius $|z|=r$, sudaro apskritimą, kurio spindulys yra r, o centras – taškas $z=0$ (10 pav.). Jeigu modulis $|z|\neq 0$, tai jį atitinka be galo daug kompleksinių skaičių, o jeigu modulis lygus nuliui, tai jį atitinka tik vienas kompleksinis skaičius $z=0$.

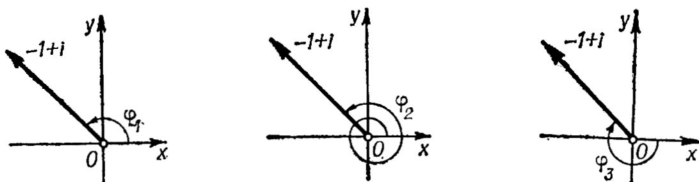


10 pav.

Vaizduojant geometriškai, akivaizdu, kad iš duotojo modulio $|z|=r\neq 0$ kompleksinių skaičių aibės galima išskirti kokį nors konkretų skaičių; pakanka imti konkrečią vektoriaus z kryptį (pavyzdžiui, nurodyti kampą φ; žr. 10 pav.).

Apibrėžimas. Kompleksinio skaičiaus $z\neq 0$ *argumentu* vadinamas kampo tarp realiosios ašies teigiamos krypties ir vektoriaus z didumas; kampo didumas laikomas teigiamu, jeigu atskaičiuojama ta kryptimi, kaip juda laikrodžio rodyklė, ir neigiamu, jeigu atskaičiuojama priešinga kryptimi.

Kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ argumentai žymimi simboliu $\arg z$ arba $\arg(a+bi)$. Žinant argumentą ir modulį, kompleksinis skaičius apibrėžiamas vienareikšmiškai. Skaičiaus $z=0$ argumentas neapibrėžiamas, bet tai yra vienintelis atvejis, kai skaičius apibrėžiamas tik savo moduliu.



11 pav.

Kompleksinio skaičiaus argumentas, skirtingai nuo modulio, nėra apibrėžtas vienareikšmiškai. Pavyzdžiui, skaičiaus $-1+i$ argumentai yra kampai $\varphi_1=\frac{3\pi}{4}$, $\varphi_2=\frac{3\pi}{4}+2\pi$, $\varphi_3=\frac{3\pi}{4}-2\pi$ (11 pav.) ir apskritai kiekvienas kampas $\varphi_k=\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$. Bet kurių dviejų kompleksinio skaičiaus argumentų skirtumas yra 2π kartotinis.

9. Raskite kompleksinio skaičiaus argumentus:

a) $z=i$, b) $z=1+i$, c) $z=-1$,

d) $z=8$, e) $z=-3i$, f) $z=2-2i$.

10. Raskite aibes kompleksinės plokštumos taškų, tenkinančių sąlygas:

a) vienas iš skaičiaus z argumentų yra nulis,

b) vienas iš argumentų yra $\frac{\pi}{2}$,

c) vienas iš argumentų yra $\frac{5\pi}{2}$,

d) vienas iš argumentų φ tenkina nelygybes $2\pi<\varphi<3\pi$,

e) vienas iš argumentų φ tenkina nelygybes $0\leqslant\varphi<2\pi$.

11. Raskite aibę kompleksinės plokštumos taškų, tenkinančių sąlygą

$$\arg z=(2n+1)\pi, \quad n\in \boldsymbol{Z}.$$

12. Kompleksinių skaičių z, tenkinančių sąlygą $|z+1-i|\leqslant 1$, aibėje raskite skaičių, kurio argumentas būtų mažiausias teigiamas skaičius.

13. Kompleksinių skaičių z, tenkinančių sąlygą $|z-5i|\leqslant 3$, aibėje raskite skaičių, kurio argumentas būtų mažiausias teigiamas skaičius.

§ 9. ĮVAIRIOS KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ UŽRAŠYMO FORMOS. KOMPLEKSINIŲ SKAIČIŲ VEIKSMAI

1. Algebrinė ir trigonometrinė kompleksinio skaičiaus formos. Kompleksinio skaičiaus z užrašas $a+bi$ yra vadinamas *algebrine kompleksinio skaičiaus forma.*

Be algebrinės yra ir kitos kompleksinių skaičių užrašymo formos – trigonometrinė ir rodiklinė.

Dabar nagrinėsime trigonometrinę kompleksinio skaičiaus užrašymo formą, o apie rodiklinę formą kalbėsime 6 skirsnyje.

Realiąją ir menamąją kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ dalis galima išreikšti jo moduliu $|z|=r$ ir argumentu φ:

$$\begin{cases} a=r\cos\varphi, \\ b=r\sin\varphi. \end{cases}$$

Šios lygybės lengvai nustatomos iš 10 paveikslo. Taigi kompleksinį skaičių z galima užrašyti šitaip:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi);$$

čia r – kompleksinio skaičiaus modulis, φ – vienas (bet kuris) iš jo argumentų.

Kompleksinio skaičiaus užrašas

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

yra vadinamas jo *trigonometrine forma.*

Daugeliu atvejų trigonometrinė kompleksinių skaičių forma yra patogesnė už algebrinę.

Norint kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ algebrinę formą pakeisti trigonometrine, pakanka rasti jo modulį ir vieną iš argumentų. Modulis randamas iš formulės $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

Žinodami modulį r, argumentą randame iš sistemos

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{a}{r}, \\ \sin\varphi=\dfrac{b}{r}. \end{cases} \qquad (1)$$

1 pavyzdys. Skaičių $z=1-i$ užrašysime trigonometrine forma. Randame modulį

$$|z|=r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}.$$

Argumentą φ randame iš sistemos

$$\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Vienas tos sistemos sprendinys yra, pavyzdžiui, $\varphi=\frac{7\pi}{4}$, taigi duotojo kompleksinio skaičiaus trigonometrinė forma yra

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Akivaizdu, kad to paties skaičiaus trigonometrinė forma bus ir

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Beje, skaičių $1-i$ galima išreikšti trigonometrinių funkcijų reikšmėmis ir kitais būdais, pavyzdžiui,

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

arba

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Nors tie skaičiaus $1-i$ užrašai ir teisingi, bet jie nėra to skaičiaus trigonometrinės formos.

Dar kartą pabrėšime, kad, norint užrašyti skaičių $a+bi$ trigonometrine forma, visų (1) sistemos sprendinių nereikia – užtenka žinoti vieną sprendinį.

1 pastaba. Kai reikia išspręsti (1) sistemą, dažnai būna patogiau spręsti lygtį

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}, \qquad (2)$$

kuri gaunama, antrąją sistemos lygtį panariui padalijus iš pirmosios. Kiekvienas (1) sistemos sprendinys yra ir (2) lygties sprendinys. Atvirkštinis teiginys nėra teisingas, taigi (2) lygtis nėra ekvivalenti (1) sistemai. Tačiau, radus (2) lygties sprendinius, lengvai galima išrinkti tenkinančius (1) sistemą. Tam tikslui reikia nustatyti, kuriame kompleksinės plokštumos ketvirtyje yra taškas $z=a+bi$, o tai matyti iš algebrinės kompleksinio skaičiaus formos. Išnagrinėsime pavyzdį.

2 pavyzdys. Užrašysime skaičių $z=-1-\sqrt{3}i$ trigonometrine forma.

Randame duotojo skaičiaus modulį

$$r=|-1-\sqrt{3}i|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=2.$$

Skaičiaus z argumentai turi tenkinti lygtį

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3},$$

kurios sprendiniai yra

$$\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi n, \quad n\in \mathbf{Z}.$$

Kadangi skaičius $z=-1-\sqrt{3}i$ priklauso trečiajam kompleksinės plokštumos ketvirčiui, tai reikšmes

$$\varphi=\frac{\pi}{3}+2\pi k, \quad k\in \mathbf{Z},$$

reikia atmesti, nes jos netenkina (1) sistemos. Skaičiaus $z=-1-\sqrt{3}i$ argumentu galime imti, pavyzdžiui, $\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi$.

Taigi

$$-1-\sqrt{3}i=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

2 pastaba. Žinoma, ne visada vietoj (1) sistemos pravartu spręsti (2) lygtį. Pavyzdžiui, kai $a=0$, taip daryti ne tik nereikia, bet ir negalima. Akivaizdu, kad tuomet skaičiaus argumentas bus arba $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (kai $b>0$), arba $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ (kai $b<0$).

Pratimas

1. Užrašykite trigonometrine forma kompleksinį skaičių:

a) $z=\sqrt{3}-i$, b) $z=-2$, c) $z=1$,

d) $z=i^{17}$, e) $z=-\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}$,

f) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, g) $z=1+\cos\frac{10\pi}{9}+i\sin\frac{10\pi}{9}$.

2. Trigonometrine forma užrašytų kompleksinių skaičių daugyba ir dalyba. Trigonometrinė kompleksinių skaičių forma yra labai patogi tuos skaičius dauginant ir dalijant. Jeigu

$$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$$

yra du trigonometrine forma užrašyti skaičiai, tai

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)$$

arba

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \big(\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)\big). \tag{1}$$

Vadinasi, *dviejų kompleksinių skaičių sandaugos modulis yra lygus tų skaičių modulių sandaugai, o argumentas – daugiklių argumentų sumai.*

Ieškodami dalmens, skaitiklį ir vardiklį dauginame iš vardikliui jungtinio skaičiaus:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)},$$

arba

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \big(\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)\big). \tag{2}$$

Taigi *dviejų kompleksinių skaičių dalmens modulis yra lygus tų skaičių modulių dalmeniui, o dalmens argumentas yra lygus dalinio ir daliklio argumentų skirtumui.*

1 pavyzdys. Užrašysime trigonometrine forma kompleksinį skaičių

$$z = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)(\sqrt{3} + i)}{i - 1}.$$

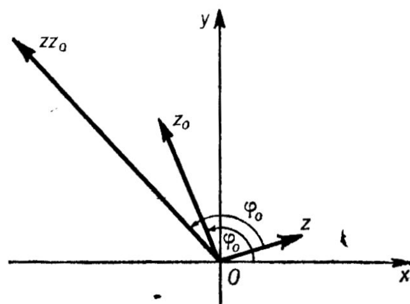
Skaičiaus $z_1 = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$ modulis lygus 1, argumentas $\varphi_1 = -\frac{\pi}{3}$; skaičiaus $z_2 = \sqrt{3} + i$ modulis lygus 2, o argumentas $\varphi_2 = \frac{\pi}{6}$; skaičiaus $z_3 = i - 1$ modulis yra $\sqrt{2}$, o argumentas $\varphi_3 = \frac{3\pi}{4}$. Todėl $|z| = \frac{|z_1| \cdot |z_2|}{|z_3|} = \frac{1 \cdot 2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, o

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{11}{12} \pi.$$

Vadinasi,

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{11}{12} \pi\right) + i \sin \left(-\frac{11}{12} \pi\right)\right).$$

Remiantis (1) formule, galima geometriškai paaiškinti kompleksinio skaičiaus z daugybą iš kompleksinio skaičiaus z_0. Skaičių z ir z_0 sandauga yra vektorius, gautas vektorių z pasukus kampu, lygiu skaičiaus z_0 argumentui, ir jį ištempus (suspaudus) $|z_0|$ kartų (12 pav.).



12 pav.

Atskiru atveju, dauginant skaičių z iš menamojo vieneto i, vektorių z reikia pasukti priešingai laikrodžio rodyklės judėjimui kampu $\frac{\pi}{2}$.

Pratimai

2. Užrašykite algebrine ir trigonometrine forma kompleksinį skaičių:

a) $z=\dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$; b) $z=\dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}$;

c) $z=\dfrac{i}{(1+i)^2}$; d) $z=\dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12}-i\sin\frac{13\pi}{12}}$;

e) $z=\dfrac{\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{i}$.

3. Užrašykite trigonometrine forma kompleksinį skaičių:

a) $z=\dfrac{5(\cos 100^\circ+i\sin 100^\circ)\,i}{3(\cos 40^\circ-i\sin 40^\circ)}$;

b) $z=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)}{i-1}$.

4. Raskite kompleksinį skaičių z_2, kuris gaunamas iš vektoriaus $z_1=2+5i$, pasukus jį laikrodžio rodyklės sukimosi kryptimi kampu $\frac{\pi}{2}$ ir ištempus du kartus.

5. Raskite kompleksinį skaičių, kuris gaunamas iš vektoriaus $z=-2+3i$, pasukus jį 180° kampu ir ištempus 1,5 karto.

3. Kėlimas laipsniu ir šaknies traukimas. Dviejų kompleksinių skaičių daugybos formulę, t.y. 2 skirsnio (1) formulę galima apibendrinti, imant n daugiklių. Matematinės indukcijos metodu lengvai gautume šitokį rezultatą:

n kompleksinių skaičių sandaugos modulis yra lygus visų daugiklių modulių sandaugai, o argumentas — visų daugiklių argumentų sumai.

Atskiras atvejis yra formulė

$$\big(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\big)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (1)$$

Ja remiantis, galima suformuluoti taisyklę, kaip kompleksinį skaičių $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ pakelti sveikuoju teigiamu laipsniu:

keliant kompleksinį skaičių natūriniu laipsniu, reikia jo modulį pakelti tuo laipsniu, o argumentą padauginti iš to laipsnio rodiklio.

1 pavyzdys. Skaičių $z=\sqrt{3}-i$ pakelkime devintuoju laipsniu. Skaičiaus z modulis lygus 2, o vienas iš argumentų $\varphi=-\frac{\pi}{6}$, todėl skaičiaus z^9 modulis lygus 2^9, o argumentas $9\varphi=-\frac{3}{2}\pi$. Vadinasi,

$$(\sqrt{3}-i)^9=2^9\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right)=512i.$$

Pratimai

6. Užrašykite algebrine forma kompleksinį skaičių:

a) $z=\left(\dfrac{\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}}{2i}\right)^3$; b) $z=\left(\dfrac{i}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$;

c) $z=(\cos 31°+i\sin 31°)^{-10}$; d) $z=\left(\dfrac{i^8+\sqrt{3}\,i^5)}{4}\right)^5$;

e) $z=\dfrac{(2i)^7}{(-\sqrt{2}+i\sqrt{2})^6}$; f) $z=\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$.

7. Užrašykite trigonometrine forma kompleksinį skaičių:

a) $z=(\sqrt{3}-i)^{100}$; b) $z=\left(\dfrac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^6$;

c) $z=\dfrac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}}$, $n\in N$; d) $z=(\operatorname{tg}1-i)^4$;

e) $z=(\operatorname{tg}2-i)^4$; f) $z=\left(\sin\dfrac{6\pi}{5}+i\left(1+\cos\dfrac{6\pi}{5}\right)\right)^5$.

8. Raskite sveikuosius skaičius n, tenkinančius lygtį

$$(1+i)^n=(1-i)^n.$$

Dabar ieškosime duotojo laipsnio šaknies iš kompleksinio skaičiaus. Skaičių z vadinsime *n-ojo laipsnio šaknimi iš skaičiaus* w (žymėsime $\sqrt[n]{w}$), jeigu $z^n=w$.

Remiantis tuo apibrėžimu, kiekvienas lygties $z^n=w$ sprendinys yra n-ojo laipsnio šaknis iš skaičiaus w. Kitaip tariant, norint ištraukti n-ojo laipsnio šaknį iš skaičiaus w, užtenka išspręsti lygtį $z^n=w$.

Jeigu $w=0$, tai, kai n bet koks, lygtis $z^n=w$ turi vienintelį sprendinį $z=0$. Jeigu $w\neq 0$, tai ir $z\neq 0$, todėl ir z, ir w galima užrašyti trigonometrine forma

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad w=s(\cos\psi+i\sin\psi).$$

Tada lygtis $z_n=w$ bus šitokia:

$$r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=s(\cos\psi+i\sin\psi).$$

Du kompleksiniai skaičiai yra lygūs tada ir tik tada, kai lygūs jų moduliai, o argumentų skirtumas yra 2π kartotinis. Vadinasi,

$$r^n=s,\quad n\varphi=\psi+2\pi k$$

arba

$$r=\sqrt[n]{s},\quad \varphi=\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k,\quad k\in \boldsymbol{Z}.$$

Taigi visus lygties $z^n=w$ sprendinius galima užrašyti šitaip:

$$z_k=\sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)+i\sin\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)\right),$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{2}$$

Iš tikrųjų, jeigu toje formulėje skaičiaus k reikšmės bus sveikieji skaičiai, nelygūs išrašytiesiems ($k=0, 1, 2, \ldots, n-1$), tai naujų kompleksinių skaičių negausime. Pavyzdžiui, jeigu $k=n$, tai

$$z_n=\sqrt[n]{s}\left(\cos\left(\frac{\psi}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\psi}{n}+2\pi\right)\right)=\sqrt[n]{s}\left(\cos\frac{\psi}{n}+i\sin\frac{\psi}{n}\right)=z_0.$$

Taigi, jeigu $w\neq 0$, tai n-ojo laipsnio šaknų iš skaičiaus w yra n; visos jos gaunamos iš (2) formulės. Visų n-ojo laipsnio šaknų iš skaičiaus w moduliai yra $\sqrt[n]{s}$, o argumentų skirtumai yra skaičiaus $\frac{2\pi}{n}$ kartotiniai. Iš to išplaukia, kad kompleksiniai skaičiai, kurie yra n-ojo laipsnio šaknys iš kompleksinio skaičiaus w, atitinka tam tikrus kompleksinės plokštumos taškus. Tie taškai yra viršūnės taisyklingojo n-kampio, įbrėžto į apskritimą, kurio spindulys yra $\sqrt[n]{s}$, o centras — taškas $z=0$.

Apie simbolį $\sqrt[n]{w}$ dar galima pasakyti štai ką: jis nėra vienareikšmiškas. Todėl, jį vartojant, visada reikia tiksliai įsivaizduoti, ką jis reiškia. Pavyzdžiui, vartojant užrašą $\sqrt{-1}$, reikia išsiaiškinti, ar tai reiškia du kompleksinius skaičius i ir $-i$, ar tik vieną iš jų ir būtent kurį.

2 pavyzdys. Raskime visas $\sqrt[4]{-16}$ reikšmes.

Skaičių $w=-16$ užrašysime trigonometrine forma:

$$w=-16=16(\cos\pi+i\sin\pi).$$

Remiantis (2) formule,

$$z_k=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{4}k\right)\right)\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

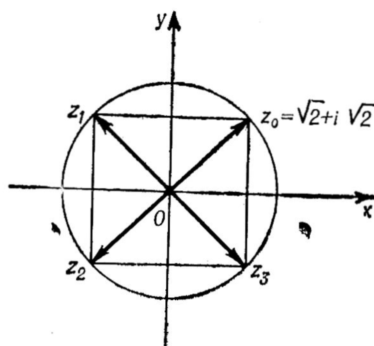
Taigi

$$z_0=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$z_1=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-i\sqrt{2},$$

$$z_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$



13 pav.

Visos keturios $\sqrt[4]{-16}$ reikšmės pavaizduotos 13 paveiksle. Skaičius z_0, z_1, z_2, z_3 atitinkantys taškai yra viršūnės kvadrato, įbrėžto į apskritimą, kurio spindulys lygus 2, o centras – taškas $z=0$.

9. Raskite visas $\sqrt[n]{w}$ reikšmes:

a) $w=-i$, $n=2$;

b) $w=-1$, $n=3$;

c) $w=8i$, $n=3$;

d) $w=1$, $n=5$.

10. Išspręskite lygtį

a) $z^3-1=i$; c) $z^5-1-i\sqrt{3}=0$;

b) $z^4-i=1$; d) $z^6+64=0$.

4. Kvadratinės lygtys. VII klasės algebros kurse buvo nagrinėjamos kvadratinės lygtys

$$ax^2+bx+c=0, \quad a\neq 0, \tag{1}$$

kurių koeficientai a, b, c – realieji skaičiai. Buvo įrodyta, kad (1) lygties sprendiniai yra

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \tag{2}$$

kai lygties diskriminantas $D=b^2-4ac$ yra neneigiamas.

Tuo atveju, kai $D<0$, buvo sakoma, kad lygtis sprendinių neturi. (2) formulė buvo gauta, išskyrus dvinario kvadratą, po to kairiąją lygties pusę išskaidžius tiesiniais daugikliais:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right)=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0.$$

Akivaizdu, kad visa tai teisinga ir kai a, b, c yra kompleksiniai skaičiai, o šaknų ieškoma kompleksinių skaičių aibėje. Vadinasi, (2) formulė apibrėžia kvadratinės lygties sprendinius ir tada, kai lygties koeficientai yra kompleksiniai skaičiai. Kadangi kompleksinių skaičių aibėje galima ištraukti šaknį iš bet kurio kompleksinio skaičiaus, tai sąlyga $D<0$ nereikalinga. Be to, ta sąlyga apskritai neturi prasmės, nes diskriminantas D gali būti ne realusis skaičius, o tokiems skaičiams sąvokos „daugiau" ir „mažiau" nėra apibrėžtos. Taigi kompleksinių skaičių aibėje lygtis $az^2+bz+c=0$ (a, b, c – kompleksiniai skaičiai, $a\neq 0$) visada yra išsprendžiama.

Jeigu $D=b^2-4ac=0$, tai lygtis turi tik vieną sprendinį; jeigu $D\neq 0$, tai lygtis turi du sprendinius. Visais atvejais kvadratinės lygties šaknys randamos iš formulės

$$z=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

(čia $\sqrt{D}$ reiškia visas šaknies reikšmes).

1 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$z^2+3z+3=0.$$

Remiantis (2) formule,

$$z=\frac{-3+\sqrt{9-12}}{2}=\frac{-3+\sqrt{-3}}{2}.$$

Kadangi $\sqrt{-3}=\pm i\sqrt{3}$, tai

$$z_1=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_2=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

2 pavyzdys. Išspręskime lygtį

$$z^2-(2+i)z-1+7i=0.$$

Remiantis kvadratinės lygties šaknų formule,

$$z=\frac{2+i+\sqrt{(2+i)^2+4(1-7i)}}{2}=\frac{2+i+\sqrt{7-24i}}{2}.$$

Norėdami rasti visas $\sqrt{7-24i}$ reikšmes, pažymėsime

$$\sqrt{7-24i}=x+yi.$$

Tada

$$7-24i=x^2+2xyi-y^2,$$

taigi x ir y tenkina sistemą

$$\begin{cases} x^2-y^2=7,\\ xy=-12; \end{cases}$$

x ir y – realieji skaičiai. Sistema turi du realiuosius sprendinius $x=4$, $y=-3$ ir $x=-4$, $y=3$. Todėl

$$z_1=\frac{2+i+4-3i}{2}=3-i,\quad z_2=\frac{2+i-4+3i}{2}=-1+2i.$$

Pratimai

11. Išspręskite lygtis:

a) $z^2-2z+5=0$,

b) $z^2-2iz-5=0$,

c) $z^2-(5+2i)z+21+i=0$,

d) $z^2-8z-3iz+13+13i=0$.

12. Užrašykite skaičių

$$z=\frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$$

algebrine forma, kai realiosios $\sqrt{5+12i}$ ir $\sqrt{5-12i}$ dalys yra neigiamos.

13. Raskite lygties

$$z^{10}-z^5-992=0$$

šaknis, kurių realiosios dalys būtų neigiamos.

5. Skaičiaus *e* kompleksinis laipsnis. Apibrėšime skaičiaus e kompleksinio laipsnio sąvoką. Skaičius e keliamas kompleksiniu laipsniu pagal formulę

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \quad (1)$$

1 pavyzdys. Pakelkime skaičių e laipsniu z, kai

$$\text{a) } z=1+i, \quad \text{b) } z=\frac{\pi}{2}i, \quad \text{c) } z=\pi i.$$

Remiantis (1) formule,

$$e^{1+i}=e(\cos 1+i\sin 1),$$

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i,$$

$$e^{\pi i}=\cos\pi+i\sin\pi=-1.$$

2 pavyzdys. Raskime skaičiaus $e^z=e^{x+iy}$ modulį ir argumentą. Realioji ir menamoji kompleksinio skaičiaus e^z dalys yra atitinkamai $e^x\cos y$ ir $e^x\sin y$. Taigi

$$|e^z|=\sqrt{(e^x\cos y)^2+(e^x\sin y)^2}=\sqrt{e^{2x}}=e^x.$$

Argumentus randame iš sistemos:

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{a}{r},\\[2mm] \sin\varphi=\dfrac{b}{r}.\end{cases}$$

Nagrinėjamuoju atveju ta sistema yra šitokia:

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{e^x\cos y}{e^x}=\cos y,\\[2mm] \sin\varphi=\dfrac{e^x\sin y}{e^x}=\sin y.\end{cases}$$

Jos sprendiniai yra $\varphi=y+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Taigi

$$|e^z|=e^x,$$

$$\arg e^z=y+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}.$$

Išvardysime pagrindines skaičiaus e kompleksinio laipsnio savybes.

1. a) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, b) $e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$, t.y. e^z pasižymi įprastinėmis laipsnio savybėmis.

Įrodysime savybę a. Jeigu $z_1=x_1+y_1i$, $z_2=x_2+y_2i$, tai

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1)\,e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2)= \\ &= e^{x_1}e^{x_2}\big(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+ \\ &+ i(\sin y_1\cos y_2+\cos y_1\sin y_2)\big)= \\ &= e^{x_1+x_2}\big(\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)\big)= \\ &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)}=e^{x_1+y_1i+x_2+y_2i}=e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Savybę b įrodytume analogiškai.

2. Kai $z=x+0i$ reikšmės yra realios,

$$e^z=e^{x+0i}=e^x,$$

t.y. kompleksinis skaičiaus e laipsnis yra laipsnis su realiuoju rodikliu.

3. Su kiekvienu $n\in\boldsymbol{Z}$ yra teisinga lygybė

$$e^{2\pi ni}=1.$$

Iš tikrųjų, remiantis (1) formule,

$$e^{2\pi ni}=\cos 2\pi n+i\sin 2\pi n=1.$$

4. Su kiekvienu kompleksiniu skaičiumi z yra teisinga lygybė

$$e^{z+2\pi ni}=e^z,\quad n\in\boldsymbol{Z}.$$

Iš tikrųjų, remiantis 1 savybe,

$$e^{z+2\pi ni}=e^z e^{2\pi ni},$$

o remiantis 3 savybe,

$$e^{z+2\pi ni}=e^z.$$

3 ir 4 savybės yra būdingos tik laipsniams ne su realiais rodikliais.

Pratimas

14. Užrašykite algebrine forma kompleksinį skaičių:

a) $z=e^{2-i}$;

b) $z=e^{-\frac{3}{2}\pi i+12\pi i}$;

c) $z=e^{3i+7+3\pi i-\frac{\pi}{2}i}$.

6. Rodiklinė kompleksinio skaičiaus forma. 5 skirsnio (1) formulėje paėmę $z=i\varphi$, $\varphi\in \boldsymbol{R}$, gausime

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Ta svarbi formulė yra vadinama *Oilerio formule.*

Anksčiau įrodėme, kad kiekvieną kompleksinį skaičių $z\neq 0$ galima užrašyti trigonometrine forma

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Iš pastarosios ir Oilerio formulių išplaukia, kad kiekvieną kompleksinį skaičių $z\neq 0$ galima užrašyti šitaip:

$$z=re^{i\varphi};$$

čia r yra kompleksinio skaičiaus modulis, o φ – vienas (bet kuris) iš jo argumentų.

Tokia kompleksinio skaičiaus užrašymo forma vadinama *rodikline.*

1 pavyzdys. Užrašykime rodikline forma kompleksinį skaičių

$$z=\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i.$$

Randame skaičiaus modulį

$$|z|=\sqrt{\frac{3}{64}+\frac{1}{64}}=\frac{1}{4}$$

ir vieną iš jo argumentų

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \varphi=-\frac{\pi}{6}$$

(nes z priklauso ketvirtajam ketvirčiui). Taigi

$$z=\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

Rodiklinė kompleksinio skaičiaus forma yra kompaktiškesnė už trigonometrinę.

Beveik visuomet, daugindami, dalydami, taip pat keldami natūriniu laipsniu ir traukdami šaknį, kompleksinius skaičius iš pradžių užrašome rodikline forma.

Jeigu $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, tai

$$z_1z_2=r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2}=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \tag{1}$$

Čia rėmėmės skaičiaus e kompleksinio laipsnio anksčiau įrodyta 1a savybe.

Remiantis 1b savybe,

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{2}$$

2 pavyzdys. Užrašykime rodikline forma kompleksinį skaičių

$$z=\frac{(-\sqrt{3}+i)\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)}{1-i}.$$

Kiekvieną skaičių $-\sqrt{3}+i$, $\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$, $1-i$ užrašome rodikline forma:

$$-\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{5\pi}{6}},$$

$$\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}=\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=e^{-i\frac{\pi}{12}},$$

$$1-i=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Remiantis (1) ir (2) formulėmis,

$$z=\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}e^{-i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}\,e^{i\pi}.$$

Remdamiesi Oilerio formule, kompleksinio skaičiaus kėlimo natūriniu laipsniu formulę galime užrašyti šitaip:

$$(re^{i\varphi})^n=r^n e^{in\varphi}, \tag{3}$$

o visų lygties $z^n=w$ sprendinių formulę galime užrašyti kompaktiškiau:

$$z_k=\sqrt[n]{se^{i\psi}}=\sqrt[n]{s}\,e^{i\left(\frac{\psi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)},\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \tag{4}$$

3 pavyzdys. Užrašykime rodikline forma kompleksinį skaičių $z=(-1+i)^5$.

Laipsnio pagrindą užrašome rodikline forma ir remiamės (3) formule:

$$(-1+i)^5=\left(\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^5=4\sqrt{2}\,e^{i\frac{15\pi}{4}}=4\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

4 pavyzdys. Visas šaknies $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$ reikšmes užrašykime rodikline forma.

Skaičių $\sqrt{3}+i$ užrašome rodikline forma ir remiamės (4) formule:

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}=\sqrt[4]{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=\sqrt[4]{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k\right)},\qquad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Pratimai

15. Užrašykite rodikline forma kompleksinius skaičius:

a) $z=-\sqrt{12}-2i$, b) $z=-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

16. Užrašykite rodikline ir algebrine forma kompleksinius skaičius:

a) $z=5e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot 0{,}2e^{i\frac{\pi}{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}-i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

b) $z=\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{-3}$;

c) $z=(\sqrt{3}-i)^6$;

d) $z=\dfrac{1}{(\cos 12°+i\sin 12°)^5}$;

e) $z=\dfrac{e^{-i\frac{\pi}{3}}(1+\sqrt{3}i)^7}{i}$.

17. Remdamiesi (4) formule, raskite visas $\sqrt[n]{w}$ reikšmes, kai

a) $w=1$, $n=3$;

b) $w=-1$, $n=4$;

c) $w=-4+\sqrt{48}i$, $n=3$;

d) $w=-1-\sqrt{3}i$, $n=4$.

III SKYRIUS

Neapibrėžtinis integralas

§ 10. FUNKCIJOS DIFERENCIALAS

1. Funkcijos diferencialo apibrėžimas. Remiantis funkcijos f išvestinės taške x_0 apibrėžimu,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Remdamiesi ribos savybe, (1) lygybę galime užrašyti šitaip:

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x);$$

čia $\alpha(\Delta x) \to 0$, kai $\Delta x \to 0$. Taigi

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(\Delta x)\,\Delta x. \qquad (2)$$

Iš (2) formulės išplaukia, kad funkcijos f pokytį taške x_0 sudaro du dėmenys, jeigu tik ta funkcija turi išvestinę taške x_0. Jeigu $f'(x_0) \neq 0$, tai pirmasis (2) formulės dėmuo $f'(x_0)\,\Delta x$ yra proporcingas Δx, nes $f'(x_0)$ nepriklauso nuo Δx; taigi tas dėmuo yra tiesinis Δx atžvilgiu. Kadangi $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x_0) \cdot \Delta x = 0$, tai pirmasis dėmuo yra nykstantis dydis, kai $\Delta x \to 0$. (2) formulės antrasis dėmuo yra taip pat nykstantis dydis, kai $\Delta x \to 0$, ir toks, kad santykis $\frac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{f'(x_0)\,\Delta x}$ vėl yra nykstantis dydis, kai $\Delta x \to 0$, nes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{f'(x_0)\,\Delta x} = 0.$$

Todėl pirmasis dėmuo $f'(x_0)\,\Delta x$ yra pagrindinė funkcijos pokyčio taške x_0 dalis. Tas tiesinis Δx atžvilgiu dėmuo vadinamas funkcijos f diferencialu taške x_0 ir žymimas $df(x_0)$. Vadinasi,

$$df(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x.$$

Pastebėję, kad $dx = x'\,\Delta x = \Delta x$, nepriklausomo kintamojo diferencialą apibrėšime kaip jo pokytį. Tada funkcijos diferencialą taške bus galima išreikšti formule

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx. \qquad (3)$$

Todėl diferencialą galėsime apibrėžti šitaip.

A p i b r ė ž i m a s. Jeigu funkcija f yra apibrėžta kokioje nors taško x_0 aplinkoje ir turi išvestinę taške x_0, tai *funkcijos f diferencialu* taške x_0 yra vadinama išvestinės tame taške ir nepriklausomo kintamojo diferencialo (arba pokyčio) sandauga.

Jeigu funkcija $f(x)$, $x \in]a; b[$, turi išvestinę kiekviename intervalo $]a; b[$ taške, tai

$$df(x) = f'(x)\,dx. \tag{4}$$

Iš šios lygybės išplaukia

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Vadinasi, funkcijos išvestinė yra tos funkcijos ir argumento diferencialų dalmuo. Remiantis (4) formule, galima rasti funkcijų diferencialus, kai žinomos jų išvestinės. Pavyzdžiui, jeigu c yra konstanta, tai $dc = (c')\,dx = 0 \cdot dx = 0$,

$$dx^2 = (x^2)'\,dx = 2x\,dx,$$

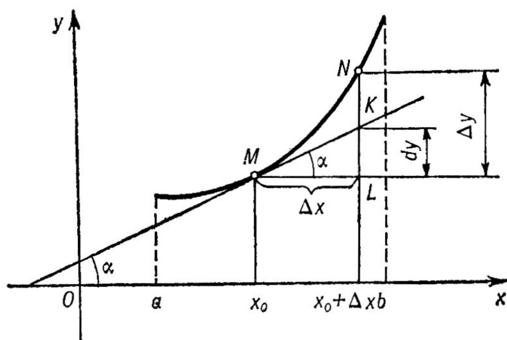
$$d(3x^3 + 4x + 7) = (3x^3 + 4x + 7)'\,dx = (9x^2 + 4)\,dx,$$

$$d(\sin x + x^3) = (\sin x + x^3)'\,dx = (\cos x + 3x^2)\,dx,$$

$$d(e^x + \cos 3x) = (e^x + \cos 3x)'\,dx = (e^x - 3\sin 3x)\,dx,$$

$$d\ln x = (\ln x)'\,dx = \frac{dx}{x}.$$

2. Geometrinė diferencialo prasmė. Nagrinėsime diferencijuojamą funkciją $y = f(x)$, $x \in]a; b[$, kurios grafikas pavaizduotas 14 paveiksle.



14 pav.

Iš Δ MKL turime

$$|KL| = |ML|\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Kadangi $|ML| = \Delta x$, $\mathrm{tg}\,\alpha = f'(x_0)$, tai $|KL| = f'(x_0)\,\Delta x$. Todėl $dy = |KL|$.

Remiantis paskutine lygybe, g e o m e t r i š k a i d i f e r e n c i a l ą g a l i m a p a a i š k i n t i š i t a i p: jeigu funkcija f turi išvestinę taške x_0, tai tos funkcijos diferencialas taške x_0 yra jos grafiko liestinės taške su abscise x_0 ordinatės pokytis, gaunamas, iš lietimosi taško perėjus į tašką su abscise $x_0 + \Delta x$.

Pastaba. Matome (žr. 14 pav.), kad funkcijos diferencialas taške apskritai nėra lygus funkcijos pokyčiui tame pačiame taške:

$$dp \neq \Delta y, \quad \text{nes} \quad |KL| \neq |NL|.$$

Tačiau, kai Δx reikšmės mažos, funkcijos pokytis apytiksliai lygus jos diferencialui, t.y. $\Delta y \approx dy$. Ta apytiksle lygybe plačiai remiamasi tiek matematikoje, tiek ir jos taikymuose, nes nesunkiai galima apskaičiuoti funkcijos pokytį su nedidele paklaida. Jeigu Δy pakeisime reiškiniu dy, tai geometriškai kreivės lanką MN pakeisime tiesės atkarpa MK. Vadinasi, siaurame intervale kiekvieną netiesinę diferencijuojamą funkciją galima laikyti tiesine.

Baigdami pastebėsime, kad tiesinės funkcijos diferencialas yra lygus jos pokyčiui, nes

$$d(kx+b) = (kx+b)'\,dx = k\,dx;$$

$$\Delta(kx+b) = [k(x+\Delta x)+b] - (kx+b) = k\,\Delta x = k\,dx,$$

t.y.

$$d(kx+b) = \Delta(kx+b).$$

3. Diferencialo taikymas apytiksliuose skaičiavimuose. Remiantis funkcijos diferencialo taške x_0 apibrėžimu,

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = \alpha(\Delta x)\,\Delta x;$$

čia $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Vadinasi, $df(x_0)$ yra pokyčio $\Delta f(x_0)$ artinys taške x_0, ir absoliutinė to artinio paklaida artėja prie nulio, kai $\Delta x \to 0$. Be to, jeigu $f'(x_0) \neq 0$, tai santykinė paklaida taip pat artėja prie nulio, kai $\Delta x \to 0$.

Iš tikrųjų

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\Delta f(x_0) - df(x_0)}{df(x_0)} \right| = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\alpha(\Delta x)\,\Delta x}{f'(x_0)\,\Delta x} \right| = 0.$$

Iš to išplaukia, kad, kai funkcija f yra diferencijuojama taške x_0 ir $f'(x_0) \neq 0$, o visi Δx pakankamai maži, yra teisinga šitokia formulė:

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0), \quad \text{t. y.} \quad \Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x. \qquad (1)$$

Tai yra pagrindinė paprasčiausių apytikslių skaičiavimų formulė.

1 pavyzdys. Sakykime, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \in]0;\ +\infty[$.

Kadangi

$$f'(x) = \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx},$$

kai $x \neq 0$, tai, remiantis (1) formule,

$$\Delta f(x_0) = \sqrt[n]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[n]{x_0} \approx \frac{\sqrt[n]{x_0}}{nx_0}\,\Delta x,$$

kai visi Δx pakankamai maži ir $x_0 \neq 0$. Taigi

$$\sqrt[n]{x_0+\Delta x} \approx \sqrt[n]{x_0} + \frac{\sqrt[n]{x_0}}{n x_0}\,\Delta x, \qquad (2)$$

kai visi Δx yra pakankamai maži.

Remdamiesi (2) formule, apskaičiuosime $\sqrt{3{,}998}$:

$$\sqrt{3{,}998} = \sqrt{4-0{,}002} \approx \sqrt{4} + \frac{-0{,}002 \cdot \sqrt{4}}{2 \cdot 4} = 2 - 0{,}0005 = 1{,}9995.$$

Kad apskaičiuotume $\sqrt[5]{243{,}45}$, vėl turime remtis (2) formule:

$$\sqrt[5]{243{,}45} = \sqrt[5]{243+0{,}45} \approx \sqrt[5]{243} + \frac{0{,}45 \cdot \sqrt[5]{243}}{5 \cdot 243} =$$

$$= 3 + \frac{0{,}45 \cdot 3}{5 \cdot 3^5} \approx 3{,}001.$$

2 pavyzdys. Sakykime, $f(x) = \sin x$, $x \in]-\infty;\ +\infty[$. Kadangi $f'(x) = \cos x$, $x \in]-\infty;\ +\infty[$, tai, remiantis (1) formule, su kiekvienu $x \in]-\infty;\ +\infty[$ ir visais pakankamai mažais Δx

$$\Delta f(x_0) = \sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0 \approx \cos x_0\,\Delta x,$$

$$\sin(x_0+\Delta x) \approx \sin x_0 + \cos x_0\,\Delta x. \qquad (3)$$

Atskiru atveju, remiantis (3) formule,

$$\sin \Delta x \approx \Delta x,$$

kai visi Δx yra pakankamai maži ir $x_0=0$. (3) formulėje paėmę $x_0 = \frac{\pi}{4}$, gausime

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\Delta x\right) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\,(1+\Delta x),$$

kai visi Δx pakankamai maži.

3 pavyzdys. Jeigu $f(x) = \ln x$, $x \in]\,0;\ +\infty[$, tai $f'(x) = \frac{1}{x}$, $x \in]0;\ +\infty[$. Todėl, remiantis (1) formule, kai visi Δx pakankamai maži ir $x_0 > 0$:

$$\Delta f(x_0) = \ln(x_0+\Delta x) - \ln x_0 \approx \frac{\Delta x}{x_0},$$

$$\ln(x_0+\Delta x) \approx \ln x_0 + \frac{\Delta x}{x_0}. \qquad (4)$$

Atskiru atveju, remiantis (4) formule,

$$\ln(1+\Delta x) \approx \Delta x,$$

kai visi Δx pakankamai maži ir $x_0=1$.

Pratimai

1. Įrodykite, kad su visomis pakankamai mažomis x reikšmėmis teisingos apytikslės formulės:

a) $e^x \approx 1+x$; b) $\operatorname{tg} x \approx x$; c) $\arcsin x \approx x$;

d) $\operatorname{arctg} x \approx x$.

2. Raskite apytiksles reikšmes:

a) $\sqrt{9{,}02}$; b) $\sqrt[3]{3}$; c) $\sqrt[3]{24}$; d) $\sqrt[3]{30}$; e) $\sqrt[4]{3}$; f) $\sqrt[4]{90}$.

3. Apytiksliai apskaičiuokite:

a) $\sqrt[3]{65}$; b) $\sqrt[10]{1000}$; c) $\sqrt[3]{125{,}1324}$;

d) $\sin 29°$; e) $\ln 1{,}05$; f) $\cos 91°$; g) $\operatorname{tg} 44°$;

h) $\ln(e+0{,}1)$; i) $\ln 0{,}97$.

§ 11. NEAPIBRĖŽTINIS INTEGRALAS IR JO SAVYBĖS

1. Pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas. Diferencialinio skaičiavimo uždavinys – rasti duotosios funkcijos išvestinę ir diferencialą. Dažnai praktikoje yra duota išvestinė $F'(x)=f(x)$ arba, tai yra ekvivalentu, diferencialas $dF(x)=f(x)\,dx$ ir reikia rasti funkciją, kurios išvestinė yra duota, t.y. spręsti atvirkštinį uždavinį. Pavyzdžiui, žinome materialaus taško judėjimo greitį v, t.y. $v=v(t)$, $t \in [a; b]$, ir turime rasti to taško nueitą kelią s. Kadangi $\frac{ds}{dt}=v$, tai, žinodami išvestinę $\frac{ds}{dt}=v(t)$, arba $ds=v(t)\,dt$, rasime funkciją s. Rasti funkciją, kai žinoma jos išvestinė arba diferencialas, – tai jau integralinio skaičiavimo uždavinys. Funkciją, kurios išvestinė arba diferencialas yra duotas, vadinsime *pirmykšte.*

Apibrėžimas. Diferencijuojamą funkciją $F(x)$, $x \in]a; b[$, vadinsime funkcijos $f(x)$ *pirmykšte funkcija* intervale $]a; b[$, jeigu $F'(x)=f(x)$ su kiekvienu $x \in]a; b[$.

Pastaba. Funkcijos, apibrėžtos atkarpoje, pirmykštė funkcija yra apibrėžiama analogiškai.

Kadangi $F'(x)=3x^2=f(x)$ su kiekvienu $x \in \mathbf{R}$, tai funkcijos $f(x)=3x^2$, $x \in \mathbf{R}$, pirmykštė visuose realiosios ašies taškuose bus funkcija $F(x)=x^3$. Pastebėsime, kad funkcijos $F_1(x)=x^3+1$ arba $F_2(x)=x^3-5$, arba apskritai $F_3(x)=x^3+C$, kai C – bet kokia konstanta, yra funkcijos $f(x)=3x^2$, $x \in \mathbf{R}$, pirmykštės, nes tų funkcijų išvestinės lygios $3x^2$.

Iš nagrinėto pavyzdžio išplaukia, kad funkcija, turinti bent vieną pirmykštę, turi jų be galo daug.

Parodysime, kaip rasti visas duotosios funkcijos pirmykštes, kai žinoma kuri nors viena.

Teorema. *Jeigu funkcija $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$, $x \in]a; b[$, pirmykštė, tai visos funkcijos f pirmykštės sudaro aibę $F(x)+C$, $C \in \mathbf{R}$.*

Įrodymas. Kadangi

$$\left(F(x)+C\right)'=F'(x)=f(x),$$

tai bet kuri funkcija $F(x)+C$, C – bet kokia konstanta, yra $f(x)$ pirmykštė.

Dabar įrodysime, kad bet kurią f pirmykštę galima užrašyti suma $F(x)+C$, kurioje C – tam tikras skaičius.

Sakykime, $\Phi(x)$ yra $f(x)$ pirmykštė, t.y. $\Phi'(x)=f(x)$ su kiekvienu $x\in]a;\ b[$. Apibrėšime pagalbinę funkciją $\varphi(x)=\Phi(x)-F(x)$, $x\in]a;\ b[$, ir įrodysime, kad ji yra konstanta.

Jeigu x_1 ir x_2, $x_1<x_2$, yra bet kurie intervalo $]a;\ b[$ taškai, tai, remiantis Lagranžo teorema, egzistuoja toks taškas $\xi\in]x_1;\ x_2[$, kad

$$\varphi(x_2)-\varphi(x_1)=\varphi'(\xi)(x_2-x_1).$$

Kadangi $\varphi'(x)=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ su visais $x\in]\ a;\ b[$ ir, atskiru atveju, $\varphi'(\xi)=0$, tai $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$. Taigi $\varphi(x_2)=\varphi(x_1)$ su bet kuriais x_1 ir x_2 iš intervalo $]a;\ b[$.

Vadinasi, $\varphi(x)=C$, C – tam tikras skaičius, t.y.

$$\Phi(x)=F(x)+C,\quad x\in]\,a;\ b\,[.$$

Teorema įrodyta.

Apibrėžimas. Visų funkcijos $f(x)$ pirmykščių intervale $]a;\ b[$ aibę vadinsime funkcijos f *neapibrėžtiniu integralu* intervale $]a;\ b[$ ir žymėsime

$$\int f(x)\,dx. \tag{1}$$

Tą simbolį skaitysime: „ef nuo iks integralas dė iks atžvilgiu". Simbolį $\int$ vadinsime integralo ženklu, $f(x)$ – pointegraline funkcija, $f(x)\,dx$ – pointegraliniu reiškiniu, x – integravimo kintamuoju.

Jeigu $F(x)$, $x\in]\,a;\ b[$, yra kuri nors funkcijos $f(x)$ pirmykštė intervale $]a;\ b[$, tai rašysime

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C; \tag{2}$$

čia C – bet kokia konstanta.

Funkcijos ieškojimas, kai duota jos išvestinė arba diferencialas, vadinamas *integravimu.* Integravimas – veiksmas, atvirkštinis diferencijavimui. Ar teisingai suintegruota, galima patikrinti diferencijuojant.

Pavyzdžiui, $\int(2x+3)\,dx=x^2+3x+C$, nes $(x^2+3x+C)'=(x^2)'+(3x)'+$ $+(C)'=2x+3$. Taigi $(x^2+3x+C)'=2x+3$ arba $\left(\int(2x+3)\,dx\right)'=$ $=(x^2+3x+C)'$.

2. Pagrindinės neapibrėžtinio integralo savybės. Sakykime, 1—6 formulėse visos funkcijos yra apibrėžtos viename ir tame pačiame intervale ir jame turi išvestines. Tada

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$;

2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$;

3. $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$;

4. $\int df(x) = f(x) + C$;

5. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a \neq 0$ – konstanta;

6. $\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx.$

Kad 1 ir 2 savybės yra teisingos, išplaukia iš neapibrėžtinio integralo apibrėžimo. Iš tikrųjų, jeigu F yra viena iš funkcijos f pirmykščių, tai, remiantis apibrėžimu,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C;$$

čia $F'(x) = f(x)$ arba $dF(x) = f(x)\,dx$.

Vadinasi,

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x);$$

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\,(F(x) + C) + dF(x) = f(x)\,dx.$$

Kadangi $df(x) = f'(x)\,dx$, tai pakanka įrodyti vieną kurią nors savybę – 3 arba 4. Akivaizdu, kad f yra savo išvestinės f' pirmykštė. Todėl, remiantis apibrėžimu,

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$$

Analogiškai įrodytume 5 ir 6 savybes.

3. Neapibrėžtinių integralų lentelė. Remiantis integralo apibrėžimu, kiekvieną konkrečios funkcijos išvestinės formulę, t.y. $F'(x) = f(x)$, galima užrašyti kaip integralinę formulę:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Todėl, remiantis ta pastaba ir išvestinių lentele, galima sudaryti neapibrėžtinių integralų lentelę.

1. $\int 0\,dx = C$, C – konstanta.

2. $\int dx = x + C$.

3. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$,

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

5. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Atskiru atveju $\int e^x\,dx = e^x + C$.

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.

7. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $|x| < a$.

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$, $a \neq 0$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$, $a \neq 0$,

jeigu pošaknyje yra reiškinys $x^2 - a^2$, tai laikome $|x| > |a|$.

Pateiktieji integralai vadinami *lenteliniais*.

Pastebėsime, kad 4, 8, 9, 10, 12, 13 formulės yra teisingos tik su tomis x reikšmėmis, su kuriomis vardiklis nelygus nuliui. Kad kiekviena duotoji formulė yra teisinga, galima įrodyti diferencijuojant. Įrodysime, kad yra teisinga, pavyzdžiui, 4 formulė.

Čia reikia nagrinėti du atvejus:

1) jeigu $x > 0$, tai $|x| = x$ ir 4 formulė yra

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Išdiferencijavę gausime

$$(\ln x + C)' = \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x};$$

2) jeigu $x<0$, tai $|x| = -x$ ir 4 formulė yra

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C.$$

Išdiferencijavę gausime

$$(\ln(-x) + C)' = \frac{-1}{-x} + 0 = \frac{1}{x}.$$

Taigi (4) formulė yra teisinga.

§ 12. INTEGRAVIMO METODAI

1. Betarpiško integravimo pavyzdžiai. *Betarpišku integravimu* vadinsime šitokį integralų skaičiavimo metodą: remiantis pagrindinėmis neapibrėžtinių integralų savybėmis, tie integralai suvedami į lentelinius.

1 pavyzdys.

$$\int (3x^2 + x + 1)\,dx = \int 3x^2\,dx + \int x\,dx + \int dx =$$

$$= 3\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C = x^3 + \frac{x^2}{2} + x + C.$$

2 pavyzdys.

$$\int \frac{(2+x)\,dx}{x} = \int \frac{2dx}{x} + \int \frac{xdx}{x} = 2\int \frac{dx}{x} + \int dx = 2\ln|x| + x + C.$$

3 pavyzdys.

$$\int \frac{x^2\,dx}{4+3x^3} = \frac{1}{9}\int \frac{d(4+3x^3)}{4+3x^3} = \frac{1}{9}\ln|4+3x^3| + C.$$

4 pavyzdys.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx + \int \cos 2xdx\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\int \cos 2xd(2x)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

5 pavyzdys.

$$\int e^{7x}\,dx = \frac{1}{7}\int e^{7x}\,d(7x) = \frac{1}{7}e^{7x} + C.$$

6 pavyzdys.

$$\int \frac{x^2\,dx}{3+x^2}=\int \frac{3+x^2-3}{3+x^2}\,dx=\int \frac{3+x^2}{3+x^2}\,dx+\int \frac{-3dx}{3+x^2}=$$

$$=\int dx-3\int \frac{dx}{3+x^2}=x-3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C=x-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

7 pavyzdys.

$$\int 3^x\cdot 4^{2x}\,dx=\int (3\cdot 16)^x\,dx=\int 48^x\,dx=\frac{48^x}{\ln 48}+C.$$

8 pavyzdys.

$$\int \frac{dx}{25+4x^2}=\int \frac{dx}{4\left(\frac{25}{4}+x^2\right)}=\frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{5}{2}\right)^2+x^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{5}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\frac{5}{2}}+C=\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C.$$

9 pavyzdys.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{9\left(\frac{1}{9}-x^2\right)}}=\int \frac{dx}{3\sqrt{\frac{1}{9}-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{1}{3}}+C=\frac{1}{3}\arcsin 3x+C.$$

10 pavyzdys.

$$\int \frac{dx}{3x^2-5}=\int \frac{dx}{3\left(x^2-\frac{5}{3}\right)}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{5}{3}}}\cdot\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{5}{3}}}{x+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{15}}\cdot\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{5}{3}}}{x+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right|+C.$$

11 pavyzdys.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}}=\int \frac{dx}{\sqrt{7\left(x^2-\frac{8}{7}\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}\right|+C.$$

12 pavyzdys. Apskaičiuosime

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

Sprendimas. Kadangi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tai

$$\frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Todėl

$$\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx + \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx =$$

$$= \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$

$$= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| + C = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

13 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \frac{dx}{\sqrt{11 + 10x - x^2}}$.

Sprendimas. Kadangi $11 + 10x - x^2 = 36 - 25 + 10x - x^2 = 36 - (x-5)^2$, tai

$$\int \frac{dx}{\sqrt{11 + 10x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36 - (x-5)^2}} = \int \frac{d(x-5)}{\sqrt{6^2 - (x-5)^2}} =$$

$$= \arcsin \frac{x-5}{6} + C.$$

14 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \frac{dx}{\sqrt{17 - 4x - x^2}}$.

Sprendimas. Kadangi $17 - 4x - x^2 = 21 - 4 - 4x - x^2 = 21 - (x+2)^2$, tai

$$\int \frac{dx}{\sqrt{17 - 4x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{21 - (x+2)^2}} =$$

$$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{21 - (x+2)^2}} \quad \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{21}} + C.$$

Apskritai, skaičiuojant integralus, reikia tinkamai perdirbti pointegralinį reiškinį, po to remtis neapibrėžtinių integralų lentele.

Skaičiuojant integralus

$$\int \sin mx \cos nx\, dx, \quad \int \sin mx \sin nx\, dx, \quad \int \cos mx \cos nx\, dx,$$

patogu naudotis trigonometrinėmis formulėmis, sandaugą pakeičiančiomis algebrine suma:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\,[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\,[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\,[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

15 pavyzdys.

$$\int \sin 3x \cos 2x dx = \int \frac{1}{2} [\sin (3-2) x + \sin (3+2) x] dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin x dx + \frac{1}{2} \int \sin 5x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} (-\cos x) + \frac{1}{2 \cdot 5} \int \sin 5x d (5x) = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C.$$

16 pavyzdys.

$$\int \sin 4x \sin 5x \, dx = \int \frac{1}{2} [\cos (-x) - \cos 9x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos x dx - \frac{1}{2} \int \cos 9x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2 \cdot 9} \int \cos 9x d (9x) = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{18} \sin 9x + C.$$

17 pavyzdys.

$$\int \cos 3x \cos 5x \, dx = \int \frac{1}{2} [\cos (-2x) + \cos 8x] \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos 8x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2} \int \cos 2x d (2x) + \frac{1}{2 \cdot 8} \int \cos 8x d (8x) = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 8x + C.$$

2. Kintamojo keitimo metodas. Neapibrėžtinių integralų skaičiavimas, keičiant kintamąjį (arba kintamojo keitimo metodas) pagrįstas teiginiu, išplaukiančiu iš sudėtinės funkcijos diferencijavimo taisyklės.

Sakykime, duotos funkcijos $f(x)$, $x \in]a; b[$, $\varphi(t)$, $t \in]c; d[$, *ir egzistuoja sudėtinė funkcija* $f(\varphi(t))$, $t \in]c; d[$. *Jeigu funkcija* $f(x)$ *turi pirmykštę* $F(x)$, *o funkcija* $\varphi(t)$ *yra diferencijuojama, tai funkcija* $F(\varphi(t))$ *yra funkcijos* $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$, $t \in]c; d[$, *pirmykštė, todėl*

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt = F(\varphi(t)) + C.$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \cos 5x \, dx$.

Sprendimas. Pažymime $t = 5x$; tada $x = \frac{t}{5}$ ir $dx = \frac{dt}{5}$. Taigi

$$\int \cos 5x \, dx = \int \cos t \, \frac{dt}{5} = \frac{1}{5} \int \cos t \, dt =$$

$$= \frac{1}{5} \sin t + C = \frac{1}{5} \sin 5x + C.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

Sprendimas. Tarkime, kad $t=\frac{1}{x}$; tada $x=\frac{1}{t}$ ir $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Vadinasi,

$$\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx=\int t^2 e^t \left(-\frac{dt}{t^2}\right)=-\int e^t dt=-e^t+C=-e^{\frac{1}{x}}+C.$$

3 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

Sprendimas. Pažymėkime $t=1-x^2$; tada $dt=-2xdx$, t.y. $xdx=-\frac{dt}{2}$. Todėl

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx=\int \sqrt{t}\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{t^{1+\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{3}\,t^{3/2}+C=-\frac{1}{3}\,(1-x^2)^{3/2}+C.$$

4 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Sprendimas. Apibrėžkime $t=\arcsin x$; tada $dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Taigi

$$\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int t^2\,dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{(\arcsin x)^3}{3}+C.$$

5 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \frac{2x\,(\arccos x^2)^3\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Sprendimas. Tokiam integralui tinka keitinys $t=\arccos x^2$; tada

$$dt=-\frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Todėl

$$\int \frac{2x\,(\arccos x^2)^3}{\sqrt{1-x^4}}=-\int t^3\,dt=-\frac{t^4}{4}+C=-\frac{1}{4}\,(\arccos x^2)^4+C.$$

6 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \sin x\cos^7 x\,dx$.

Sprendimas. Apibrėžkime $t=\cos x$; tada $dt=-\sin x\,dx$. Taigi

$$\int \sin x\cos^7 x\,dx=-\int t^7\,dt=-\frac{t^8}{8}+C=-\frac{\cos^8 x}{8}+C.$$

7 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}\,dx$.

Sprendimas. Pažymėkime $t=\sqrt{x}$; tada $dt=\frac{dx}{2\sqrt{x}}$ ir $\frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt$. Taigi

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{3\sqrt{x}}\,dx=\frac{2}{3}\int e^t\,dt=\frac{2}{3}\,e^t+C=\frac{2}{3}\,e^{\sqrt{x}}+C.$$

8 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \sqrt{4-x^2}\,dx \quad (|x| \leqslant 2)$.

Sprendimas. Šiuo atveju tinka keitinys $x=2\sin t$ $\left(|t| \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, arba $\sin t = \frac{x}{2}$; tada $dx = 2\cos t dt$ ir $t = \arcsin\frac{x}{2}$. Taigi

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\cos t.$$

Vadinasi,

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 2\int (1+\cos 2t)\,dt = 2t + \sin 2t + C.$$

Kadangi

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} =$$

$$= 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2},$$

tai

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

3. Dalinis integravimas. Remiantis sandaugos diferencijavimo taisykle,

$$d(uv) = v\,du + u\,dv.$$

Todėl

$$u\,dv = d(uv) - v\,du.$$

Jeigu dviejų funkcijų išvestinės (arba diferencialai) yra lygūs, tai ir jų neapibrėžtiniai integralai yra lygūs. Todėl

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du.$$

Remdamiesi neapibrėžtinių integralų 4 savybe

$$\int d(uv) = uv + C,$$

gausime

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1}$$

Tą formulę vadinsime *dalinio integravimo formule.*

1 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int xe^x\,dx$.

Sprendimas. Apibrėžę $u=x$, $dv=e^x\,dx$, gausime $du=dx$, $v=e^x$. Vadinasi, remiantis (1) formule,

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \ln x\, dx$.

Sprendimas. Pažymėję $u=\ln x$, $dv=dx$, gausime $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$. Remiantis (1) formule,

$$\int \ln x\, dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx =$$
$$= x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

3 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int x \cos x\, dx$.

Sprendimas. Pažymėję $u=x$, $dv=\cos x\, dx$, gausime $du=dx$, $v=\sin x$. Todėl, remiantis (1) formule,

$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + C.$$

4 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int (\arcsin x)^2\, dx$.

Sprendimas. Apibrėžę $u = (\arcsin x)^2$, $dv=dx$, gausime $du= \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$, $v=x$.

Todėl, remiantis (1) formule,

$$\int (\arcsin x)^2\, dx = x(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Norėdami rasti paskutinįjį integralą, dar kartą integruosime dalimis. Pažymėję $u=\arcsin x$, $dv=\frac{-x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$, gausime $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v= =\sqrt{1-x^2}$. Todėl

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x\, dx = \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int dx =$$
$$= \sqrt{1-x^2} \arcsin x - x + C.$$

Taigi

$$\int (\arcsin x)^2\, dx = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.$$

Integruojant dalimis sandaugą, nėra tokios bendros taisyklės, nurodančios, kurį pointegralinio reiškinio daugiklį reikia žymėti raide u, o kurį raide v. Būtina, kad dv išraiškoje būtų dx, kad tą išraišką būtų nesunku integruoti ir kad integralas $\int u\, dv$ būtų paprastesnis už pradinį. Pavyzdžiui, integraluose $\int P(x) e^{ax}\, dx$, $\int P(x) \sin mx\, dx$, $\int P(x) \cos mx\, dx$ raide u žymimas polinomas $P(x)$, o integraluose $\int P(x) \ln x\, dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} x\, dx$, $\int P(x) \arcsin x\, dx$ raide u žymimas atitinkamai $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$.

Jeigu pirmosios rūšies integraluose polinomo $P(x)$ laipsnis yra didesnis už vienetą, tai integruojama dalimis kelis kartus.

5 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int (x^2-5x+3)\sin 4x\,dx$.

Sprendimas. Pažymėkime $u=x^2-5x+3$, $dv=\sin 4x dx$; tada $du=(2x-5)\,dx$, $v=-\frac{1}{4}\cos 4x$. Todėl

$$\int (x^2-5x+3)\sin 4x\,dx=-\frac{x^2-5x+3}{4}\cos 4x+\frac{1}{4}\int (2x-5)\cos 4x\,dx.$$

Paskutinį integralą vėl integruosime dalimis. Dabar pažymėsime $u=2x-5$, $dv=\cos 4x\,dx$; tada $du=2dx$ ir $v=\frac{1}{4}\sin 4x$. Todėl

$$\int (2x-5)\cos 4x\,dx=\frac{2x-5}{4}\sin 4x-\frac{1}{2}\int \sin 4x\,dx=$$

$$=\frac{2x-5}{4}\sin 4x+\frac{1}{8}\cos 4x+C.$$

Vadinasi,

$$\int (x^2-5x+3)\sin 4x\,dx=$$

$$=-\frac{x^2-5x+3}{4}\cos 4x+\frac{2x-5}{16}\sin 4x+\frac{1}{32}\cos 4x+C=$$

$$=\frac{-8x^2+40x-23}{32}\cos 4x+\frac{2x-5}{16}\sin 4x+C.$$

6 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$.

Sprendimas. Pažymėkime $u=\mathrm{arctg}\,x$, $dv=xdx$; tada $du=\frac{dx}{1+x^2}$, $v=\frac{x^2}{2}$. Vadinasi,

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}.$$

Atskirai apskaičiuosime paskutinį integralą:

$$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2}=\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}dx=\int dx-\int \frac{dx}{1+x^2}=x-\mathrm{arctg}\,x+C.$$

Vadinasi,

$$\int x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx=\frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,x+C=$$

$$=\frac{x^2+1}{2}\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+C.$$

Dalinio integravimo formule remiamės ir skaičiuodami integralus $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, $\int e^{ax}\cos bx\,dx$. Juos integruojame dalimis du kartus, abu kartus raide u pažymėję arba rodiklinę, arba trigonometrinę funkciją.

Po dviejų dalinio integravimo veiksmų gausime tiesinę lygtį ieškomo integralo atžvilgiu.

7 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int e^{3x} \sin 2x \, dx$.

Sprendimas. Pažymėję $u = e^{3x}$, $dv = \sin 2x \, dx$, gausime $du = 3e^{3x} \, dx$, $v = -\frac{1}{2} \cos 2x$.

Todėl

$$\int e^{3x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos 2x \, dx. \qquad (2)$$

Skaičiuodami paskutinį integralą, dar kartą integruosime dalimis:

$$u = e^{3x}, \quad dv = \cos 2x \, dx;$$

$$du = 3e^{3x} \, dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Vadinasi,

$$\int e^{3x} \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} e^{3x} \sin 2x - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin 2x \, dx. \qquad (3)$$

Įrašę (3) reiškinį į (2) lygybę, gausime:

$$\int e^{3x} \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{4} e^{3x} \sin 2x - \frac{9}{4} \int e^{3x} \sin 2x \, dx.$$

Galutinai

$$\int e^{3x} \sin 2x \, dx = -\frac{2}{13} e^{3x} \cos 2x + \frac{3}{13} e^{3x} \sin 2x + C.$$

Išnagrinėsime dar vieną dalinio integravimo pavyzdį ir apskaičiuosime $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx$, kurio reikės kreivių lankų ilgiams skaičiuoti.

8 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx$.

Sprendimas. Pažymėję $u = \sqrt{x^2 + a^2}$, $dv = dx$, gausime $du = \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $v = x$.

Vadinasi,

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

Kadangi

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

tai

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= \int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx - a^2 \ln | x + \sqrt{x^2 + a^2} |.$$

Įrašę gautąjį reiškinį į duotąjį integralą, turėsime

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2 \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|,$$

iš čia gausime

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C.$$

Analogiškai apskaičiuotume integralą $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, kurio reikės skritulio plotui rasti.

4. Kai kurių racionaliųjų funkcijų integravimas. Iš pradžių nagrinėsime integralą

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Norint apskaičiuoti integralą, iš pradžių reikia vardiklį x^2+px+q užrašyti kaip kvadratų skirtumą (jeigu $p^2-4q>0$) arba kaip kvadratų sumą (jeigu $p^2-4q<0$), po to remtis neapibrėžtinių integralų lentele.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \frac{dx}{x^2+8x+7}$.

Sprendimas. Kadangi $p^2-4q=64-28=36>0$, tai $x^2+8x+7=$ $=(x+4)^2-9$.

Todėl

$$\int \frac{dx}{x^2+8x+7} = \int \frac{dx}{(x+4)^2-9} = \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2-9} =$$

$$= \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+4-3}{x+4+3}\right| + C = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x+1}{x+7}\right| + C.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Sprendimas. Kadangi $p^2-4q=4-20=-16<0$, tai $x^2+2x+5=$ $=(x+1)^2+4$. Todėl

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2} + C.$$

Dabar skaičiuosime integralus $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$, $P_n(x)$ ir $Q_m(x)$ yra atitinkamai n-ojo ir m-ojo laipsnio polinomai ($n<m$).

Norint rasti tuos integralus, būtina trupmeną $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ užrašyti kaip paprastesnių trupmenų sumą. To bendrojo uždavinio nespręsime, tik išnagrinėsime kelis atskirus atvejus.

3 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \frac{x\,dx}{x^2-5x+6}$.

Sprendimas. Kadangi vardiklio šaknys yra $x_1=2$ ir $x_2=3$, tai vardiklį galima išskaidyti daugikliais

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$

Dabar tą trupmeną išreikšime paprastesnių trupmenų suma

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$$

ir rasime koeficientus A ir B. Subendravardiklinsime dešiniosios pusės trupmenas:

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

Kadangi čia yra tapatybė, tai skaitikliai turi būti lygūs, todėl

$$x=A(x-3)+B(x-2),$$

arba

$$x=(A+B)x-3A-2B.$$

Abiejose tapatybės pusėse koeficientai prie tų pačių x laipsnių turi būti lygūs, todėl sudarysime lygčių sistemą

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -3A-2B=0, \end{cases}$$

kurią išsprendę, gausime $A=-2$, $B=3$.

Vadinasi,

$$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{x-2}+\frac{3}{x-3}.$$

Taigi

$$\int\frac{x\,dx}{x^2-5x+6}=-2\int\frac{dx}{x-2}+3\int\frac{dx}{x-3}=$$
$$=-2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C.$$

4 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int\frac{dx}{x^3-1}$.

Sprendimas. Kadangi $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, tai trupmeną galima užrašyti šitaip:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1},$$

t.y.

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)},$$

arba

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Taigi

$$1=(A+B)x^2+(A-B+C)x+(A-C).$$

Abiejose tapatybės pusėse koeficientai prie tų pačių x laipsnių turi būti lygūs, todėl sudarysime lygčių sistemą

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A-B+C=0, \\ A-C=1. \end{cases}$$

Ją išsprendę, gausime $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=-\frac{2}{3}$. Taigi

$$\int \frac{dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

5 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}$.

Sprendimas. Užrašysime trupmeną kaip paprasčiausių trupmenų sumą:

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{x+1}.$$

Dešiniąją pusę subendravardiklinsime ir sulyginsime skaitiklius:

$$x-1=A(x-2)(x+1)^2+Bx(x-2)(x+1)^2+$$
$$+Cx^2(x+1)^2+Dx^2(x-2)+Ex^2(x+1)(x-2).$$

Abiejose tapatybės pusėse koeficientai prie tų pačių x laipsnių turi būti lygūs, todėl gausime lygčių sistemą:

$$\begin{cases} B+C+E=0, \\ A+2C+D-E=0, \\ -3B+C-2D-2E=0, \\ -3A-2B=1, \\ -2A=-1. \end{cases}$$

Ją išsprendę, rasime $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{5}{4}$, $C=\frac{1}{36}$, $D=\frac{2}{3}$, $E=\frac{11}{9}$.

Vadinasi,

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2}-\frac{5}{4}\int \frac{dx}{x}+\frac{1}{36}\int \frac{dx}{x-2}+\frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2}+\frac{11}{9}\int \frac{dx}{x+1}=$$

$$=-\frac{1}{2x}-\frac{5}{4}\ln|x|+\frac{1}{36}\ln|x-2|-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{11}{9}\ln|x+1|+C.$$

5. „Neapskaičiuojamų“ integralų pavyzdžiai. Ką tik nagrinėjome kai kuriuos neapibrėžtinių integralų skaičiavimo metodus. Tačiau ne kiekvienos elementariosios funkcijos pirmykštė yra elementarioji funkcija. Kai kurios nors elementariosios funkcijos f pirmykštė yra elementarioji funkcija, sakoma, kad integralas $\int f(x)\,dx$ yra išreiškiamas elementariosiomis funkcijomis arba kad integralą galima apskaičiuoti. Jeigu integralas nėra išreiškiamas elementariosiomis funkcijomis, tai sakoma, kad integralo „negalima rasti“. Pavyzdžiui, funkcijų

$$e^{x^2},\quad e^{-x^2},\quad x\operatorname{tg}x,\quad \frac{\sin x}{x},\quad \frac{\cos x}{x},\quad \sin x^2,$$

$$\sqrt{1+x^3},\quad \sqrt[3]{1+x^2},\quad \sqrt{\sin x},\quad \frac{1}{\ln x}$$

pirmykštės egzistuoja, bet jos nėra elementariosios funkcijos. Todėl sakoma, kad integralų

$$\int e^{x^2}dx,\quad \int e^{-x^2}dx,\quad \int x\operatorname{tg}x\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx,\quad \int \sin x^2\,dx,\quad \int \sqrt{1+x^3}\,dx,$$

$$\int \sqrt[3]{1+x^2}\,dx,\quad \int \sqrt{\sin x}\,dx,\quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

„negalima rasti“.

Pratimai

Raskite integralus:

1. $\int x^4\,dx.$ 2. $\int 5x^7\,dx.$ 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}.$

4. $\int x^3(x^2-1)\,dx.$ 5. $\int (ax+b)\,dx.$

6. $\int (7-3t-t^3)\,dt.$ 7. $\int (2u^3-5u^2-7u-3)\,du.$

8. $\int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{4}{x^3}\right)dx.$ 9. $\int\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt.$

10. $\int (ax^7+bx^3+cx^2+dx+e\sqrt{x}+f)\,dx.$

11. $\int \frac{x^8-3x^5-x+1}{x^3}\,dx.$ 12. $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}\,dx.$

13. $\int \frac{t^2+\sqrt{t^3}+3}{\sqrt{t}}\,dt.$ 14. $\int 4^x\,dx.$

15. $\int b^x\,dx\ (b>0,\ b\neq 1)$.

16. $\int (t^7+7^t)\ dt$.

17. $\int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}\,dx$.

18. $\int \frac{3x+1}{x+2}\,dx$.

19. $\int \frac{t^3+2t^2+5t+13}{t^2+5}\,dt$.

20. $\int \frac{dx}{16+9x^2}$.

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

22. $\int \frac{dt}{t^3-3}$.

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-13}}$.

24. $\int \frac{dt}{\sqrt{9-4t^2}}$.

25. $\int \frac{dx}{5-2x^2}$.

26. $\int (3e^x+5\sin x+3\cos x+4)\,dx$.

27. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$.

28. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

29. $\int \sin 3x\sin 10x\,dx$.

30. $\int \sin 7x\cos 3x\,dx$.

31. $\int \sin x\sin 3x\,dx$.

32. $\int \cos 8x\cos 3x\,dx$.

33. $\int \sin 7x\,dx$.

34. $\int \sin\frac{3}{5}x\,dx$.

35. $\int \cos 10x\,dx$.

36. $\int \cos\frac{x}{9}\,dx$.

37. $\int \left(\sin 11x+\cos 6x+\sin\frac{x}{7}+\cos\frac{3}{4}x\right)dx$.

38. $\int (e^x+e^{-x})\,dx$.

39. $\int e^{3x+5}\,dx$.

40. $\int (3x-1)^5\,dx$.

41. $\int (1+4x)^{\frac{3}{5}}\,dx$.

42. $\int \frac{(6x+7)\,dx}{3x^2+7x+4}$.

43. $\int \frac{x^5\,dx}{7x^6+1}$.

44. $\int \frac{x^2\,dx}{(3+5x^3)^7}$.

45. $\int \sqrt{3x^2-1}\,x\,dx$.

46. $\int \cos^5 x\sin x\,dx$.

47. $\int \sqrt[3]{1+\cos x}\sin x\,dx$.

48. $\int \cos^2 x\,dx$.

49. $\int \sin^2 x\,dx$.

50. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

51. $\int x^3e^{x^4}\,dx$.

52. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$.

53. $\int \frac{3dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

54. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}\,dx.$

55. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+3}}.$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{27-x^2+6x}}.$

57. $\int \frac{dx}{x^2+10x+41}.$

58. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$

59. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}.$

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x}}.$

61. $\int \frac{dx}{x^2+6x+25}.$

62. $\int \frac{dx}{x^2+5x+9}.$

63. $\int x \ln x\,dx.$

64. $\int x^2 \sin x\,dx.$

65. $\int (3x-4) \ln x\,dx.$

66. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx.$

67. $\int (2x-5)\,e^{-3x}\,dx.$

68. $\int \arccos x\,dx.$

69. $\int x \cos \frac{x}{2}\,dx.$

70. $\int (2x-3) \sin \frac{x}{2}\,dx.$

71. $\int x^2 e^{-x}\,dx.$

72. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx.$

73. $\int \arcsin x\,dx.$

74. $\int e^x \cos x\,dx.$

75. $\int e^x \sin x\,dx.$

76. $\int \frac{dx}{x^2+8x+25}.$

77. $\int \frac{dx}{17+2x+x^2}.$

78. $\int \frac{dx}{x^2+7x-8}.$

79. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2-4x+4}.$

80. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^2+x+1}.$

81. $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}\,dx.$

82. $\int \frac{x\,dx}{x^3-1}.$

83. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

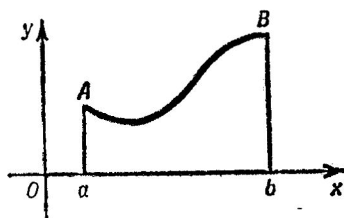
84. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$

IV SKYRIUS

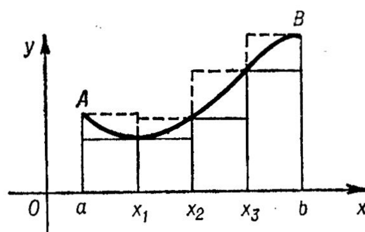
Apibrėžtinis integralas

§ 13. KREIVINĖS TRAPECIJOS PLOTAS

Nagrinėsime kurią nors neneigiamą tolydžią funkciją $f(x)$, $x \in [a;\ b]$. Plokštumos dalį $AabB$ (15 pav.), kurios kraštą sudaro abscisių ašies atkarpa, vertikaliųjų tiesių $x=a$ ir $x=b$ atkarpos bei duotosios funkcijos grafikas, vadinsime *kreivine trapecija*. Kitaip tariant, kreivinė trapecija yra aibė plokštumos taškų, kurių koordinatės x, y tenkina sąlygas: $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.



15 pav.



16 pav.

Rasime tos kreivinės trapecijos plotą. Tuo tikslu atkarpą $[a;\ b]$ padalysime taškais

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

į n lygaus ilgio atkarpų

$$[a;\ x_1],\ [x_1;\ x_2],\ \ldots,\ [x_{n-1};\ b].$$

Raidėmis m_i ir M_i pažymėsime atitinkamai mažiausią ir didžiausią funkcijos $f(x)$ reikšmes atkarpoje $[x_{i-1};\ x_i]$, $i = 1,\ \ldots,\ n$.

Kreivinė trapecija $AabB$ bus padalyta į n dalių (16 pav.). Akivaizdu, kad i-osios dalies plotas ne mažesnis už $m_i(x_i - x_{i-1})$ ir ne didesnis už $M_i(x_i - x_{i-1})$. Taigi visos kreivinės trapecijos $AabB$ plotas ne mažesnis už sumą

$$m_1 \Delta x_1 + \ldots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

kur $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, ir ne didesnis už sumą

$$M_1 \Delta x_1 + \ldots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Pažymėkime tas sumas atitinkamai s_n ir S_n. Tuomet S_{AabB} tenkins nelygybes:

$$s_n \leqslant S_{AabB} \leqslant S_n.$$

Kairėje pusėje yra plotas laiptinės figūros, kuri yra duotosios kreivinės trapecijos poaibis, dešinėje – plotas laiptinės figūros, kurios poaibis yra duotoji kreivinė trapecija. Kai atkarpa $[a; b]$ padalyta į pakankamai mažas atkarpas, t.y. n pakankamai didelis, tų figūrų plotai mažai skiriasi tarpusavyje, taigi ir nuo kreivinės trapecijos ploto. Galima laikyti, kad sekos (s_n) ir (S_n) turi tą pačią ribą, kuri yra lygi figūros $AabB$ plotui.

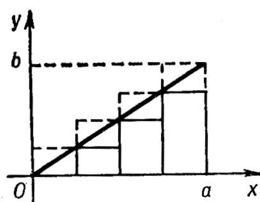
Tą teiginį gavome, laikydami, kad nagrinėjamos kreivinės trapecijos plotas egzistuoja, bet tos sąvokos dar neapibrėžėme. Remiantis atliktais tyrimais, natūralu apibrėžti ploto sąvoką.

Apibrėžimas. Sakykime, duota tolydi neneigiama funkcija $f(x)$, $x \in [a; b]$. Jeigu sekų (s_n) ir (S_n) ribos egzistuoja ir yra lygios, tai ta riba vadinama *kreivinės trapecijos*

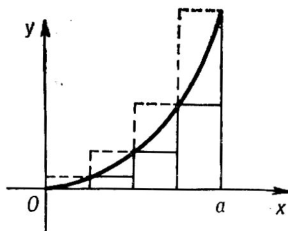
$$\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

plotu.

Remiantis teiginiu, kurį suformuluosime 14 paragrafe, kiekviena kreivinė trapecija turi plotą.



17 pav.



18 pav.

1 pavyzdys. Įrodysime, kad stačiojo trikampio (17 pav.) su viršūnėmis taškuose $(0; 0)$, $(a; 0)$ ir $(a; b)$ plotas, remiantis duotuoju apibrėžimu, lygus $\frac{1}{2}ab$, t.y. apskaičiuojamas pagal žinomą formulę.

Sprendimas. Duotasis trikampis yra kreivinė trapecija, atitinkanti funkciją

$$f(x) = \frac{b}{a} x, \quad x \in [0; a].$$

Taškais $x_i=\frac{a}{n}i$, $i=0, 1, \ldots, n$, padalysime atkarpą [0; a] į n atkarpų, kurių ilgiai yra $\frac{a}{n}$. Tada (žr. 17 pav.)

$$m_i=f(x_{i-1})=\frac{b}{n}(i-1),$$

$$M_i=f(x_i)=\frac{b}{n}i,$$

todėl

$$s_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{n}(i-1)\frac{a}{n}=\frac{ab}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n}{2}=\frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{b}{n}i\frac{a}{n}=\frac{ab}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{ab}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{ab}{2}.$$

Taigi įrodėme, kad duotojo trikampio plotas yra $\frac{1}{2}ab$.

2 pavyzdys. Rasime plotą figūros, kurios kraštą sudaro parabolės $y=x^2$ dalis bei tiesių $y=0$ ir $x=a$, $a>0$, atkarpos (18 pav.).

Sprendimas. Kaip ir 1 pavyzdyje, taškais $x_i=\frac{a}{n}i$, $i=0, 1, \ldots, n$, padalysime atkarpą [0; a] į n atkarpų, kurių ilgiai yra $\frac{a}{n}$. Tada

$$s_n=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}^2=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2,$$

$$S_n=\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\frac{a^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2.$$

Formulę

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

esame įrodę I dalies 7 paragrafo 3 skirsnyje. Taigi

$$S_n=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{a^3}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right),$$

$$s_n=\frac{a^3}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}=\frac{a^3}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right),$$

todėl

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a^3}{3}.$$

Vadinasi, duotosios figūros plotas lygus $\frac{1}{3}a^3$.

Dabar suformuluosime porą pastabų.

1 pastaba. Vėl nagrinėsime kreivinę trapeciją $AabB$ ir, kaip jau įprasta, atkarpą $[a; b]$ taškais x_i, $i=0, 1, \ldots, n$, padalysime į n lygaus ilgio atkarpų. Kiekvienoje atkarpoje $[x_{i-1}; x_i]$ bet kaip išrinksime tašką ir pažymėsime ξ_i.

Sakykime, kaip ir anksčiau, m_i ir M_i yra mažiausia ir didžiausia funkcijos f reikšmės atkarpoje $[x_{i-1}; x_i]$. Tada akivaizdu, kad

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i,$$

kai $i=1, \ldots, n$. Kiekvieną tą nelygybę padauginę iš $\Delta x_i = x_i + x_{i-1}$ ir gautąsias nelygybes panariui sudėję, turėsime šitokią nelygybę:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Iš čia išplaukia, kad riba

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

egzistuoja, nepriklauso nuo taško ξ_i parinkimo ir visada yra lygi figūros $AabB$ plotui.

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = S_{AabB}.$$

2 pastaba. Anksčiau atkarpą $[a; b]$ dalijome į n lygaus ilgio atkarpų. Galima įrodyti, kad (1) formulė bus teisinga ir tada, kai tą atkarpą padalysime į n tokių atkarpų, kurių ilgiai bus skirtingi ir didžiausias iš tų ilgių artės prie nulio, kai $n\to\infty$.

Pratimai

1. Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos tiesės $y=x$ dalimis bei tiesių $y=0$ ir $x=3$ atkarpomis.

2. Apskaičiuokite plotą figūros, kurios kraštą sudaro tiesės $y=2x$ dalis bei tiesių $x=a$ ir $x=b$, $a>0$, $b>a$, atkarpos.

3. Apskaičiuokite plotą kreivinės trapecijos, kurią apibrėžia funkcijos $y=e^x$ grafikas atkarpoje $[0; 1]$.

4. Įrodykite, kad kreivinės trapecijos, kurią apibrėžia parabolės $y=1-x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ dalis, plotas lygus $\frac{2}{3}$.

§ 14. APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS

Nagrinėsime funkciją $f(x)$, apibrėžtą atkarpoje $[a; b]$. Kaip ir 13 paragrafe, atkarpą $[a; b]$ taškais

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

padalysime į n vienodo ilgio atkarpų.

Kiekvienoje atkarpoje $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, bet kaip išrinksime vieną tašką, kurį pažymėsime ξ_i: $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$.

Sumą

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

kurioje $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, vadinsime funkcijos f *integraline suma.*

Akivaizdu, kad ta suma priklauso nuo atkarpos $[a; b]$ skaidinio ir nuo taškų ξ_i.

Apibrėžimas. Jeigu riba

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

egzistuoja ir nepriklauso nuo taškų ξ_i, tai funkciją f vadinsime *integruojama* atkarpoje $[a; b]$, o ribą vadinsime funkcijos f *apibrėžtiniu integralu* atkarpoje $[a; b]$ ir žymėsime

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Tą užrašą skaitysime „funkcijos $f(x)$ integralas dx atžvilgiu nuo a iki b“, arba trumpiau „$f(x)\,dx$ integralas nuo a iki b“. Simbolį $\int$ vadinsime *integralo ženklu,* funkciją f – *pointegraline funkcija,* kintamąjį x – *integravimo kintamuoju,* reiškinį $f(x)\,dx$ – *pointegraliniu reiškiniu.* Skaičius a ir b vadinsime atitinkamai apatiniu ir viršutiniu *integravimo rėžiais.*

Taigi, remiantis apibrėžimu,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Pastebėsime, kad integralas nepriklauso nuo to, kokia raide pažymėtas integravimo kintamasis. Todėl, pavyzdžiui,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du.$$

Be įrodymo pateiksime šitokius teiginius.

1 teorema. *Jeigu funkcija* $f(x)$ *yra monotoninė atkarpoje* $[a; b]$, *tai ji integruojama toje atkarpoje.*

2 teorema. *Jeigu funkcija* $f(x)$ *yra tolydi atkarpoje* $[a; b]$, *tai ji integruojama toje atkarpoje.*

Žinoma, jeigu $f(x)$ yra ir monotoninė, ir tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai ji integruojama toje atkarpoje.

Pastebėsime, kad praktikoje pasitaikančios aprėžtos funkcijos paprastai yra integruojamos bet kokioje atkarpoje, kurioje jos apibrėžtos.

Betarpiško (remiantis apibrėžimu) apibrėžtinių integralų skaičiavimo pavyzdžiai buvo nagrinėti 13 paragrafe (žr. 1 ir 2 pavyzdžius).

Baigdami pateiksime neintegruojamos funkcijos pavyzdį.

Atkarpoje $[0; 1]$ nagrinėsime Dirichlė funkciją. Jos reikšmė racionaliuosiuose taškuose lygi vienetui, o iracionaliuosiuose taškuose – nuliui. Todėl, integralinėse sumose paėmę ξ_i iracionaliuosius taškus, gausime

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0;$$

taigi tų sumų riba, kai $n \to \infty$, lygi 0. Jeigu ξ_i imsime racionaliuosius taškus, tai

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 1;$$

taigi tų sumų riba lygi 1.

Vadinasi, Dirichlė funkcijos integralinių sumų atkarpoje $[0; 1]$ riba priklauso nuo taškų ξ_i. Taigi Dirichlė funkcija nėra integruojama atkarpoje $[0; 1]$.

§ 15. PAGRINDINĖS APIBRĖŽTINIŲ INTEGRALŲ SAVYBĖS IR JŲ IŠVADOS

Iš pradžių nagrinėsime pagrindines apibrėžtinių integralų savybes.

1. *Su kiekvienu realiuoju skaičiumi* α

$$\int_a^b \alpha\, dx = \alpha (b-a). \tag{1}$$

Iš tikrųjų, imant bet kurią funkcijos $f(x)=\alpha$, $x \in [a; b]$, integralinę sumą,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \alpha (b-a),$$

todėl tų sumų riba, kai $n \to \infty$, lygi $\alpha (b-a)$.

2. *Jeigu funkcija* $f(x)$ *yra integruojama atkarpoje* $[a; b]$, *tai funkcija* $\alpha f(x)$, *kai* α *– bet koks realusis skaičius, taip pat integruojama atkarpoje* $[a; b]$ *ir*

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx, \tag{2}$$

t.y. pastovų daugiklį galima iškelti prieš integralo ženklą.

Iš tikrųjų, imant bet kurią funkcijos $\alpha f(x)$ integralinę sumą,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

todėl

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Taigi funkcija $\alpha f(x)$ yra integruojama atkarpoje $[a; b]$ ir yra teisinga (2) formulė.

3. *Jeigu funkcijos* $f(x)$ *ir* $g(x)$ *yra integruojamos atkarpoje* $[a; b]$, *tai jų suma* $f(x)+g(x)$ *taip pat integruojama atkarpoje* $[a; b]$ *ir*

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \tag{3}$$

t.y. sumos integralas yra lygus integralų sumai.

Iš tikrųjų

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \big(f(\xi_i)+g(\xi_i)\big)\,\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i =$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

4. *Jeigu funkcijos* $f(x)$ *ir* $g(x)$ *yra integruojamos atkarpoje* $[a; b]$ *ir*

$$f(x) \leqslant g(x), \tag{4}$$

tai yra teisinga nelygybė

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx. \tag{5}$$

Iš tikrųjų, remiantis (4) nelygybe, bet kurios funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ integralinės sumos tenkina nelygybę

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i,$$

iš kurios, kai $n \to \infty$, gauname (5) nelygybę.

5. *Jeigu funkcija $f(x)$ yra integruojama atkarpoje $[a;\ b]$, tai ji integruojama ir bet kurioje atkarpoje, kuri yra atkarpos $[a;\ b]$ poaibis. Be to, jeigu funkcija $f(x)$ yra integruojama atkarpose $[a;\ c]$ ir $[c;\ b]$, tai ji integruojama atkarpoje $[a;\ b]$ ir*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Tos savybės neįrodysime.

1 išvada. *Jeigu funkcijos $f(x)$, $g(x)$ ir $\varphi(x)$ yra integruojamos atkarpoje $[a;\ b]$ ir*

$$m\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant Mg(x),$$

tai

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (7)$$

Atskiru atveju, jeigu $m \leqslant f(x) \leqslant M$, tai

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad (8)$$

(7) nelygybė išplaukia betarpiškai iš 4 savybės, o (8) nelygybė – iš (7), kai $\varphi(x)=g(x)=1$, ir 1 savybės.

2 išvada. *Jeigu funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra integruojamos atkarpoje $[a;\ b]$, $g(x) \geqslant 0$ ir*

$$|f(x)| \leqslant Mg(x), \qquad (9)$$

tai

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx. \qquad (10)$$

Atskiru atveju, jeigu $|f(x)| \leqslant M$, tai

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a). \qquad (11)$$

Iš tikrųjų, remiantis (9) sąryšiu,

$$-Mg(x) \leqslant f(x) \leqslant Mg(x),$$

todėl

$$-M\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx.$$

Kadangi $M\int_a^b g(x)\,dx \geqslant 0$, tai (10) nelygybė yra teisinga. Atskiras (10) nelygybės atvejis, kai $g(x)=1$, yra (11) nelygybė.

§ 16. KAI KURIE APIBENDRINIMAI

Kol kas nagrinėjome apibrėžtinį integralą, kurio apatinis integravimo rėžis mažesnis už viršutinį. Praktikoje dėl tos sąlygos iškyla tam tikri sunkumai.

Kad to išvengtume, apibrėšime šiuos simbolius.

Apibrėžimas. Jeigu $a=b$, tai $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

Jeigu $a<b$, tai

$$\int_a^b f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx.$$

Iš paskutinės formulės išplaukia, kad, sukeitus integravimo rėžius vietomis, pasikeičia integralo ženklas.

Tokie integralai pasižymi visomis apibrėžtinių integralų savybėmis, išskyrus 4 ir jos išvadas.

1, 2 ir 3 savybes siūlome įrodyti pačiam skaitytojui.

Integralų, kurių apatinis integravimo rėžis yra didesnis už viršutinį, 4 savybę formuluosime šitaip:

Jeigu funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra integruojamos atkarpoje $[a;\ b]$ ir $f(x)\leqslant g(x)$, tai teisinga nelygybė

$$\int_b^a f(x)\,dx \geqslant \int_b^a g(x)\,dx.$$

Tą nelygybę gausime iš 15 paragrafo (5) nelygybės, padauginę ją iš -1. Atitinkamai pasikeistų ir 15 paragrafo (7) ir (8) nelygybės.

Jeigu $|f(x)|\leqslant M$ atkarpoje $[a;\ b]$, tai, kaip ir anksčiau,

$$\left|\int_b^a f(x)\,dx\right| \leqslant M(b-a).$$

Apibendrintasis integralas taip pat pasižymi 5 savybe.

Be to, bet kokiuose trijuose taškuose c_1, c_2 ir c_3 iš funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srities yra teisinga formulė

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Jeigu $c_1 < c_2 < c_3$, tai pastaroji formulė sutampa su 15 paragrafo (6) formule. Jeigu, pavyzdžiui, $c_2 < c_1 < c_3$, tai

$$\int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx = \int_{c_2}^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx$$

arba

$$\int_{c_1}^{c_3} f(x)\,dx = -\int_{c_2}^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx.$$

Sukeitę integravimo rėžius c_1 ir c_2 vietomis, gausime (1) formulę. Kitais atvejais (1) formulę įrodytume analogiškai.

§ 17. VIDURINĖS REIKŠMĖS TEOREMA

Tolydžiajai funkcijai yra teisinga ši įdomi teorema, kurią vadinsime *apibrėžtinio integralo vidurinės reikšmės teorema.*

Teorema. *Jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai egzistuoja toks atkarpos $[a; b]$ taškas ξ, kad*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a). \qquad (1)$$

Įrodymas. Pastebėsime, kad (1) lygybė yra akivaizdi, kai $a=b$. Tuo atveju kairioji ir dešinioji lygybės pusės lygios nuliui, tad reikia išnagrinėti tik atvejį, kai $a<b$.

Sakykime, $a<b$. Mažiausiąją ir didžiausiąją funkcijos $f(x)$ reikšmes atkarpoje $[a; b]$ pažymėsime atitinkamai m ir M. Tada $m \leqslant f(x) \leqslant M$ kiekviename atkarpos $[a; b]$ taške x, todėl

$$m\,(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\,(b-a).$$

Tą nelygybę padaliję panariui iš $b-a>0$, gausime

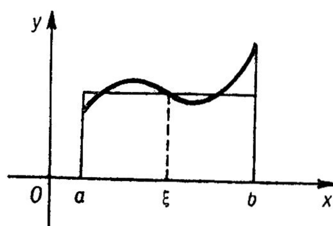
$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M.$$

Iš čia ir išplaukia (1) formulė. Iš tikrųjų, kadangi $f(x)$ yra tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai jos reikšmių aibė yra atkarpa $[m; M]$. Todėl egzistuoja toks taškas $\xi \in [a; b]$, kad

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Teorema įrodyta.

Kai funkcija yra neneigiama, vidurinės reikšmės teoremą galima paprastai paaiškinti geometriškai. Teorema tvirtina, kad plotas kreivinės trapecijos, atitinkančios funkciją f, yra lygus plotui stačiakampio, kurio pagrindas lygus trapecijos pagrindui, o aukštinė yra viena iš integruojamos funkcijos reikšmių (19 pav.).



19 pav.

Pastaba. (1) formulė yra teisinga ne tik tokiems integralams, kurių apatinis integravimo rėžis mažesnis už viršutinį, bet ir tokiems, kurių apatinis rėžis didesnis už viršutinį.

Iš tikrųjų, jeigu funkcija $f(x)$ tenkina visas ką tik įrodytos teoremos sąlygas, tai

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx = -f(\xi)(b-a) = f(\xi)(a-b);$$

čia $\xi \in [a; b]$.

§ 18. APIBRĖŽTINIS INTEGRALAS SU KINTAMU VIRŠUTINIU RĖŽIU

Jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi atkarpoje $[a; b]$, tai ji yra integruojama kiekvienoje atkarpoje $[a; x]$, $x \in [a; b]$. Apibrėžkime funkciją

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in [a;\ b]. \tag{1}$$

Tą funkciją vadinsime *integralu su kintamu viršutiniu rėžiu.*

Pastebėsime, kad (1) reiškinyje raide t pažymėjome integravimo kintamąjį, nes raide x žymime viršutinį integralo rėžį (jis yra nepriklausomas funkcijos Φ kintamasis).

Teorema. *Jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi atkarpoje $[a; b]$, $a<b$, tai* (1) *funkcija turi išvestinę atkarpoje $[a; b]$ ir $\Phi'(x)=f(x)$, t.y.*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x). \tag{2}$$

Akivaizdu, kad taškuose a ir b turimos omenyje vienpusės funkcijos $\Phi(x)$ išvestinės.

Tą teoremą vadinsime *integralo diferencijavimo pagal viršutinį rėžį teorema.*

Įrodymas. Remiantis funkcijos $\Phi(x)$ apibrėžimu ir integralo savybėmis (žr. 5 savybę),

$$\Phi(x)-\Phi(x_0)=\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

bet kuriuose atkarpos $[a; b]$ taškuose x ir x_0. Paskutinį integralą pakeisime, remdamiesi vidurinės reikšmės teorema (žr. taip pat pastabą 17 paragrafo pabaigoje). Tada

$$\Phi(x)-\Phi(x_0)=f(\xi)(x-x_0),$$

kur $\xi\in[x_0; x]$, kai $x_0<x$, ir $\xi\in[x; x_0]$, kai $x<x_0$.

Taigi kiekvienam $x\neq x_0$ egzistuoja toks ξ tarp x ir x_0, kad

$$\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=f(\xi).$$

Kadangi funkcija $f(x)$ yra tolydi atkarpoje $[a; b]$, vadinasi, ir taške $x_0\in[a; b]$, tai

$$\Phi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f(\xi)=f(x_0).$$

Akivaizdu, kad taške $x_0=a$ funkcija $\Phi(x)$ turės dešiniąją išvestinę, o taške $x_0=b$ – kairiąją. Teorema įrodyta.

Tą teoremą galima suformuluoti ir trumpiau: *tolydžiosios funkcijos integralo išvestinė pagal viršutinį rėžį yra lygi pačiai funkcijai.*

(2) formulę užrašę diferencialine forma, gausime

$$d\int_a^x f(t)\,dt=f(x)\,dx, \tag{3}$$

t.y. integralo diferencialas pagal viršutinį rėžį yra lygus pointegraliniam reiškiniui.

Remiantis įrodytąja teorema, kiekviena tolydi funkcija turi pirmykštę, kuri yra duotosios funkcijos apibrėžtinis integralas su kintamu viršutiniu rėžiu.

§ 19. NIUTONO—LEIBNICO FORMULĖ

Priminsime, kad funkciją $F(x)$ vadiname funkcijos $f(x)$ pirmykšte atkarpoje $[a; b]$, jeigu $F(x)$ turi išvestinę atkarpoje $[a; b]$ ir $F'(x)=f(x)$.

Teorema. *Jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi atkarpoje $[a; b]$, o funkcija $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė toje atkarpoje, tai teisinga formulė*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Ją vadiname *Niutono—Leibnico formule.*

Įrodymas. Remiantis integralo diferencijavimo pagal viršutinį rėžį teorema, funkcija

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė atkarpoje $[a; b]$. Kadangi funkcija $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė atkarpoje $[a; b]$, tai skirtumas $\Phi(x)-F(x)$ yra tam tikra konstanta C visoje atkarpoje $[a; b]$, t.y.

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Šioje formulėje iš pradžių paėmę $x=a$, po to $x=b$, gausime

$$\Phi(a) = F(a) + C,$$

$$\Phi(b) = F(b) + C.$$

Kadangi $\Phi(a)=0$, tai $C=-F(a)$, todėl

$$\Phi(b) = F(b) - F(a);$$

čia

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema įrodyta.

Vietoj skirtumo $F(b)-F(a)$ dažnai rašoma

$$F(x)\big|_a^b \text{ arba } [F(x)]_a^b,$$

tada (1) formulė atrodo šitaip:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\big|_a^b. \tag{2}$$

Skaitome: „$f(x)$ integralas nuo a iki b atžvilgiu dx yra lygus $F(x)$ pokyčiui nuo a iki b“.

Kadangi $f(x)\,dx=dF(x)$, tai vietoj $\int_a^b f(x)\,dx$ rašome $\int_a^b dF(x)$ ir skaitome ,,diferencialo $dF(x)$ integralas nuo a iki b" arba trumpiau, „$dF(x)$ integralas nuo a iki b".

Vadinasi,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b dF(x)=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

t.y. funkcijos diferencialo integralas nuo a iki b yra lygus jos reikšmių taškuose b ir a skirtumui.

Kaip jau minėjome, (1) formulę vadiname Niutono – Leibnico formule dviejų žymių diferencialinio ir integralinio skaičiavimo kūrėjų garbei. Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas vystėsi nepriklausomai vienas nuo kito, bet ta formulė susiejo juos į vieningą teoriją – matematinę analizę. Todėl Niutono – Leibnico formulę pagrįstai galime vadinti svarbiausia matematinėje analizėje.

Remdamiesi Niutono – Leibnico formule, galėsime apskaičiuoti apibrėžtinius integralus, nesudarydami integralinių sumų ir neieškodami jų ribų, jeigu tik yra žinoma bent viena pointegralinės funkcijos pirmykštė. Pirmykščių funkcijų ieškojimo metodus aptarėme III skyriuje.

Apskaičiuosime kelis apibrėžtinius integralus, remdamiesi Niutono – Leibnico formule.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_0^1 x^2\,dx$.

Kadangi funkcija $\frac{1}{3}x^3$ yra funkcijos x^2 pirmykštė, tai, remiantis Niutono – Leibnico formule,

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_{-1}^1 (x+\sin x+x^{10})\,dx$.

Kadangi sumos integralas lygus integralų sumai, o funkcijos $\frac{1}{2}x^2$, $-\cos x$, $\frac{1}{11}x^{11}$ yra atitinkamai funkcijų x, $\sin x$, x^{10} pirmykštės, tai

$$\int_{-1}^1 (x+\sin x+x^{10})\,dx=\int_{-1}^1 x\,dx+\int_{-1}^1 \sin x\,dx+\int_{-1}^1 x^{10}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^1+(-\cos x)\Big|_{-1}^1+\frac{1}{11}x^{11}\Big|_{-1}^1=$$

$$=\frac{1}{2}(1-1)+\Big(-\cos 1+\cos(-1)\Big)+\frac{1}{11}(1+1)=\frac{2}{11}.$$

Taigi $\int_{-1}^{1}(x+\sin x+x^{10})\,dx=\frac{2}{11}$.

3 pavyzdys. Apskaičiuokime $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$, kai $f(x)=e^x$, $x\in[0;1]$, ir $f(x)=2x$, $x\in]1;2]$.

Kadangi integralas nuo 0 iki 2 yra lygus integralų nuo 0 iki 1 ir nuo 1 iki 2 sumai, tai

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{0}^{1} e^x\,dx+\int_{1}^{2} 2x\,dx=e^x\Big|_0^1+x^2\Big|_1^2=$$

$$=e-1+4-1=e+2.$$

Taigi $\int_{0}^{2} f(x)\,dx=e+2$.

Pratimai

1. Apskaičiuokite integralus:

a) $\int_{1}^{3} x^3\,dx$; b) $\int_{1}^{2}\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$;

c) $\int_{1}^{4}\sqrt{x}\,dx$; d) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x\,dx$; e) $\int_{0}^{\pi}\sin 2x\,dx$.

2. Apskaičiuokite integralus:

a) $\int_{1}^{2}(2x+1)\,dx$; b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$; c) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

3. Duota funkcija

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{kai } 0\leqslant x\leqslant 1 \\ \sqrt{x}, & \text{kai } 1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$$

Apskaičiuokite $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$.

4. Apskaičiuokite integralus:

a) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$; b) $\int\limits_0^1 e^{2x}\,dx$; c) $\int\limits_0^2 x(3-x)\,dx$;

d) $\int\limits_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$; e) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}$; f) $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

5. Apskaičiuokite integralus:

a) $\int\limits_0^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}\,dy$; b) $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$;

c) $\int\limits_0^1 (e^x-1)^4 e^x\,dx$; d) $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

§ 20. APIBRĖŽTINIŲ INTEGRALŲ SKAIČIAVIMAS, KEIČIANT KINTAMĄJĮ

Skaičiuojant tiek apibrėžtinius, tiek neapibrėžtinius integralus, plačiai taikomas integravimo kintamojo keitimo metodas. Suformuluosime ir įrodysime šią teoremą.

Teorema. *Sakykime, funkcija $f(x)$ yra tolydi bet kokiame taške $x=\varphi(t)$, $t\in[\alpha;\ \beta]$, ir $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$. Jeigu funkcija $\varphi(t)$ turi tolydžiąją išvestinę, tai yra teisinga formulė*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Tą formulę vadinsime *integravimo kintamojo keitimo apibrėžtiniame integrale formule.*

Įrodymas. Kadangi funkcija $f(x)$ yra tolydi, tai ji būtinai turi pirmykštę, kurią žymėkime $F(x)$. Tada sudėtinė funkcija $F(\varphi(t))$ bus funkcijos $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ pirmykštė funkcija.

Remdamiesi Niutono–Leibnico formule, apskaičiuosime funkcijų $f(x)$ ir $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ integralus:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a), \qquad (2)$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)). \qquad (3)$$

Kadangi $b=\varphi(\beta)$, $a=\varphi(\alpha)$, tai dešiniosios (2) ir (3) lygybių pusės yra lygios, todėl turi būti lygios ir kairiosios pusės, t.y. teisinga (1) formulė. Teorema įrodyta.

(1) formulę galime užrašyti ir šitaip:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,d\varphi(t). \tag{4}$$

Vadinasi, keičiant integravimo kintamąjį $x=\varphi(t)$, reikia: pirma, po integralo ženklu visur raidę x pakeisti $\varphi(t)$ ir, antra, atitinkamai pakeisti integravimo rėžius.

Skaičiuojant apibrėžtinius integralus, (1) ir (4) formulės taikomos ne tik iš kairės į dešinę, bet ir iš dešinės į kairę.

Gana dažnai funkcijos $f(\varphi)\varphi'$ integralas pakeičiamas funkcijos f integralu. Tuo atveju (1) ir (4) formules naudinga užrašyti šitaip:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,dy, \tag{5}$$

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\,d\varphi(x)=\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\,dy. \tag{6}$$

(Čia pakeitėme integravimo kintamųjų žymėjimus: raidę t raide x, o raidę x raide y.)

Vadinasi, jeigu pointegralinis reiškinys yra $f(\varphi(x))\,d\varphi(x)$ arba toks gaunamas pertvarkius, tai galima pakeisti kintamąjį $y=\varphi(x)$. Tuo tikslu po integralo ženklu reikia visur vietoj $\varphi(x)$ rašyti y, o integravimo rėžius α, β pakeisti atitinkamai $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_1^2 x\cos x^2\,dx$.

Pažymėkime $x=\sqrt{t}$ ir remkimės (1) formule. Tuo tikslu reikia visur raidę x pakeisti $\sqrt{t}$ ir atitinkamai pakeisti integravimo rėžius. Čia $t=x^2$, todėl naujojo integralo rėžiai bus 1 ir 4. Taigi

$$\int_1^2 x\cos x^2\,dx=\int_1^4 \sqrt{t}\cos t\,d\sqrt{t}=\int_1^4 \sqrt{t}\cos t\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 \cos t\,dt=\frac{1}{2}\sin t\Big|_1^4=\frac{1}{2}(\sin 4-\sin 1).$$

Parodysime, kaip tą integralą apskaičiuoti, remiantis (6) formule:

$$\int_1^2 x\cos x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \cos x^2\,2x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^2 \cos x^2\,d(x^2)=$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 \cos y\,dy=\frac{1}{2}\sin y\Big|_1^4=\frac{1}{2}(\sin 4-\sin 1).$$

Čia keitinys yra $y=x^2$.

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_{-1}^{2} x\sin x^2\,dx$. Kadangi

$$\int_{-1}^2 x\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^2 \sin x^2\,d(x^2),$$

tai pažymėsime $y=x^2$. Tada

$$\int_{-1}^2 x\sin x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_1^4 \sin y\,dy=\frac{1}{2}(-\cos y)\Big|_1^4=$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 1-\cos 4).$$

Pastebėsime, kad čia keisti $x=\sqrt{t}$ negalima, nes $\sqrt{t}\geqslant 0$, o duotajame integrale x gali būti ir neigiamas.

3 pavyzdys. Apskaičiuosime funkcijos $e^{\sin x}\cos x$ integralą nuo 0 iki $\frac{\pi}{2}$.

Randame

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\,d(\sin x)=\int_0^1 e^y\,dy=e^y\Big|_0^1=e-1;$$

čia keičiame $y=\sin x$.

Pastebėsime, kad tą bei 1 ir 2 pavyzdžių integralus galėjome apskaičiuoti, nekeisdami integravimo kintamojo. Iš tikrųjų:

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x\,dx=\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\,d(\sin x)=\int_0^{\pi/2} d(e^{\sin x})=$$

$$=e^{\sin x}\Big|_0^{\pi/2}=e-1.$$

4 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos x}$.

Ieškodami neapibrėžtinio funkcijos $f(x)=\frac{1}{1+\cos x}$ integralo, pažymėsime $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Tiksliau tariant, keisime integravimo kintamąjį:

$$x=2\operatorname{arctg} t.$$

Remiantis trigonometrijos formulėmis,

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

todėl

$$\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{1+t^2+1-t^2}=\frac{1+t^2}{2}.$$

Dabar rasime dx:

$$dx=2(\operatorname{arctg} t)'\,dt=\frac{2}{2+t^2}\,dt.$$

Kadangi $\operatorname{tg}\frac{0}{2}=0$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2\cdot 2}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, tai naujojo integralo rėžiai bus 0 ir 1.

Taigi

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos x}=\int_0^1\frac{1+t^2}{2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int_0^1 dt=1.$$

5 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Pažymėsime $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Tada

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

ir naujojo intervalo rėžiai bus 0 ir 1.

Taigi

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}=\int_0^1\frac{1+t^2}{2+2t^2+1-t^2}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt=\int_0^1\frac{2}{3+t^2}\,dt.$$

Dabar keisime kintamąjį $t=\sqrt{3}\,y$:

$$\int_0^1\frac{2}{3+t^2}\,dt=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{2}{3+3y^2}\sqrt{3}\,dy=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{dy}{1+y^2}.$$

Taigi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} y \Big|_0^{1/\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Pratimai

1. Apskaičiuokite integralus:

a) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\, dx$; b) $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2}\, dx$;

c) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; d) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; e) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2. Kodėl integrale $\int_2^3 x \sqrt[3]{1-x^2}\, dx$ negalima keisti $x=\sin t$?

3. Apskaičiuokite integralus:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x\, dx$; b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$.

§ 21. APIBRĖŽTINIŲ INTEGRALŲ SKAIČIAVIMAS DALINIO INTEGRAVIMO METODU

Kaip žinome, neapibrėžtinių integralų dalinio integravimo formulė įrodoma, integruojant lygybę

$$(uv)' = uv' + vu'. \tag{1}$$

Analogiškai įrodysime ir apibrėžtinių integralų dalinio integravimo formulę.

Teorema. *Jeigu funkcijos $u(x)$ ir $v(x)$ turi tolydžias išvestines atkarpoje $[a; b]$, tai yra teisinga formulė*

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)\, u'(x)\, dx. \tag{2}$$

Trumpiau tą formulę užrašytume šitaip:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \quad (3)$$

Tiek (2), tiek (3) formules vadinsime apibrėžtinio integralo *dalinio integravimo formulėmis.*

Įrodymas. Remiantis (1) lygybe,

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b uv'\,dx + \int_a^b vu'\,dx.$$

Kadangi $(uv)'$ integralas yra lygus pokyčiui $uv\Big|_a^b$, tai

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b uv'\,dx + \int_a^b vu'\,dx.$$

Iš čia išplaukia (2) formulė. Teorema įrodyta.

Remiantis dalinio integravimo formule, vieno integralo skaičiavimas pakeičiamas kito integralo skaičiavimu. Aišku, stengiamasi, kad gautasis integralas būtų paprastesnis už pradinį ir patogesnis skaičiuoti.

1 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_1^3 \ln x\,dx$.

Pažymėsime $u=\ln x$, $dv=dx$ ir remsimės dalinio integravimo formule. Tada

$$\int_1^3 \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^3 - \int_1^3 x\,d(\ln x) =$$

$$= 3\ln 3 - \int_1^3 x\frac{1}{x}\,dx = 3\ln 3 - \int_1^3 dx = 3\ln 3 - 2.$$

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_0^\pi x^2\cos x\,dx$.

Pažymėsime $u=x^2$, $\cos x dx = dv$, t.y. $v=\sin x$, ir remsimės (2) formule:

$$\int_0^\pi x^2\cos x\,dx = x^2\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 2x\sin x\,dx = -2\int_0^\pi x\sin x\,dx.$$

Norėdami apskaičiuoti gautąjį integralą, vėl remsimės dalinio integravimo formule:

$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx = \int_0^{\pi} x d(-\cos x) =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi.$$

Taigi

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x\, dx = -2\pi.$$

3 pavyzdys. Apskaičiuosime funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0;\ 1[, \\ x, & x \in [1;\ 2[, \\ e^x + \frac{1}{6}, & x \in [2;\ 3], \end{cases}$$

integralą atkarpoje [0; 3].

Turime:

$$\int_0^3 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 x\, dx + \int_2^3 \left(e^x + \frac{1}{6}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{2} x^2\Big|_1^2 + e^x\Big|_2^3 + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(4-1) + e^3 - e^2 + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + e^3 - e^2 + \frac{1}{6} = \frac{11}{6} + e^3 - e^2 + \frac{1}{6} = 2 + e^3 - e^2.$$

Pratimai

1. Apskaičiuokite integralus:

a) $\int_0^1 xe^x\, dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$;

d) $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x}\, dx$; e) $\int_0^1 x \ln(x^2+1)\, dx$;

f) $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$; g) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$.

§ 22. APYTIKSLIAI APIBRĖŽTINIŲ INTEGRALŲ SKAIČIAVIMO METODAI

Dažnai praktikoje reikia skaičiuoti apibrėžtinius integralus funkcijų, kurių pirmykštės nėra rastos. Paprastai tuomet yra randama tik apytikslė duotojo integralo reikšmė. Netgi tais atvejais, kai pirmykštė funkcija žinoma, praktikoje kartais patogiau integralą skaičiuoti ne pagal Niutono–Leibnico formulę, bet pagal apytikslio integravimo formules.

Šiame paragrafe išvesime dvi paprasčiausias apibrėžtinių integralų apytikslio skaičiavimo formules – vadinamąsias stačiakampių ir trapecijų formules.

1. Stačiakampių formulė. Sakykime, reikia rasti funkcijos $f(x)$ integralą nuo a iki b. Kaip jau įpratome, atkarpą $[a; b]$ padalysime taškais

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{1}$$

į n vienodo ilgio atkarpų. Kiekvienos gautosios atkarpos $[x_{i-1}; x_i]$ vidurio tašką pažymėkime $\xi_i : \xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $i = 1, \ldots, n$, ir sudarykime integralinę sumą

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i). \tag{2}$$

Jeigu funkcija $f(x)$ yra integruojama atkarpoje $[a; b]$, tai

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{3}$$

Todėl, kai n yra pakankamai didelis, (2) integralinę sumą galime laikyti ieškomojo integralo artiniu:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right). \tag{4}$$

Pastebėsime, kad (3) lygybė yra teisinga, paėmus bet kurią integralinę sumą. Tačiau galima įrodyti, kad geriausi artiniai yra integralinės sumos, kuriose taškai ξ_i yra atkarpų $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, viduriai.

Taigi taškai x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, dalija atkarpą $[a; b]$ į n vienodo ilgio atkarpų $[x_{i-1}; x_i]$;

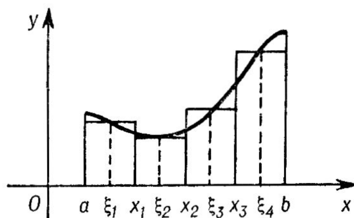
$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx.$$

Kiekvieną integralą atkarpoje $[x_{i-1}; x_i]$ pakeičiame sandauga $f(\xi_i)\,\Delta x_i$, t.y.

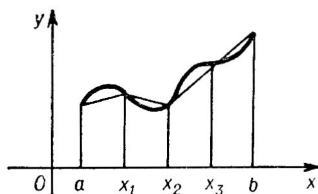
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx f(\xi_i)\,\Delta x_i;$$

čia ξ_i – atkarpos $[x_{i-1}; x_i]$ vidurys.

Jeigu funkcijos yra neneigiamos, tai atliktus veiksmus galime paaiškinti geometriškai (20 pav.): integralą atkarpoje $[x_{i-1}; x_i]$, lygų atitinkamos kreivinės trapecijos plotui, pakeičiame plotu stačiakampio, kurio pagrindas yra tas pats, o aukštinė lygi $f(\xi_i)$. Todėl (4) formulę ir vadiname apytikslio apibrėžtinių integralų skaičiavimo *stačiakampių formule.*



20 pav.



21 pav.

Jeigu funkcija turi tolydžią antrąją išvestinę, tai galima įvertinti artinio, gauto iš stačiakampių formulės, absoliutinę paklaidą. Suformuluosime atitinkamą teoremą.

Teorema. *Jeigu funkcija $f(x)$ atkarpoje $[a; b]$ turi tolydžią antrąją išvestinę, tai*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) \right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{24n^2}; \qquad (5)$$

čia M – didžiausia funkcijos $|f''(x)|$ reikšmė atkarpoje $[a; b]$. Šios teoremos neįrodinėsime.

Remiantis (1) formule,

$$\frac{x_{i-1}+x_i}{2} = a + \frac{b-a}{n}\left(i - \frac{1}{2}\right).$$

Vadinasi, stačiakampių formulę galima užrašyti šitaip:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}\left(i - \frac{1}{2}\right)\right).$$

2. Trapecijų formulė. Sakykime, kaip ir anksčiau, reikia apskaičiuoti funkcijos $f(x)$ integralą nuo a iki b. Taškais

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\, i, \quad i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

padalysime atkarpą $[a; b]$ į n vienodo ilgio atkarpų ir sudarysime integralines sumas

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}), \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \qquad (2)$$

Jeigu funkcija $f(x)$ yra integruojama atkarpoje $[a; b]$, tai

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Todėl, kai n pakankamai didelis, kiekviena (1) arba (2) integralinė suma bus ieškomojo integralo artinys. Tačiau bendruoju atveju tikslesnis artinys yra aritmetinis tų sumų vidurkis:

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}.$$

Taigi yra teisinga formulė

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}.$$

Tą formulę vadinsime apytikslio apibrėžtinių integralų skaičiavimo *trapecijų formule.*

Jeigu funkcija $f(x)$ yra neneigiama, tai tą formulę galime paprastai geometriškai paaiškinti. Būtent, atkarpą $[a; b]$ dalijame į n vienodo ilgio atkarpų ir kiekvieno kreivinės trapecijos gabalėlio plotą pakeičiame plotu trapecijos, kurios pagrindai yra $f(x_{i-1})$, $f(x_i)$, o aukštinė lygi $\frac{b-a}{n}$ (21 pav.).

Kaip įvertinti artinio, gauto pagal trapecijų formulę, absoliutinę paklaidą, paaiškės iš šios teoremos.

Teorema. *Jeigu funkcija $f(x)$ atkarpoje $[a; b]$ turi tolydžią antrąją išvestinę, tai*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right| \leqslant \frac{M(b-a)^3}{12n^2};$$

čia M — *didžiausia funkcijos* $|f''(x)|$ *reikšmė atkarpoje* $[a; b]$. Šios teoremos neįrodysime.

Kadangi

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}),$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(\mathrm{b}),$$

tai

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i).$$

Vadinasi, frapecijų formulę galime užrašyti šitaip:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a + \frac{b-a}{n} i\right)\right).$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ 0,01 tikslumu. Čia

$$f(x) = e^{x^2},\ f'(x) = 2xe^{x^2},\ f''(x) = 4x^2 e^{x^2} + 2e^{x^2}$$

ir

$$|f''(x)| \leqslant 6e$$

atkarpoje [0; 1].

Iš pradžių remsimės stačiakampių formule. Kadangi duotąjį integralą reikia apskaičiuoti 0,01 tikslumu, tai atkarpą [0; 1] padalysime į tiek vienodo ilgio atkarpų, kad būtų teisinga nelygybė

$$\frac{6e}{24n^2} \leqslant 0{,}01, \tag{3}$$

iš kurios išplaukia

$$n \geqslant 5\sqrt{e}.$$

Kadangi $e < 2{,}89 = 1{,}7^2$, tai $n=9$ tikrai tenkina (3) nelygybę.

Taigi

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} f\left(\frac{1}{9}\left(i - \frac{1}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left\{f\left(\frac{1}{18}\right) + f\left(\frac{3}{18}\right) + f\left(\frac{5}{18}\right) + f\left(\frac{7}{18}\right) +\right.$$

$$\left. + f\left(\frac{9}{18}\right) + f\left(\frac{11}{18}\right) + f\left(\frac{13}{18}\right) + f\left(\frac{15}{18}\right) + f\left(\frac{17}{18}\right)\right\}$$

0,01 tikslumu.

Norėdami gauti galutinį rezultatą, rasime funkcijos $f(x)=e^{x^2}$ reikšmes nurodytuosiuose taškuose. Taigi gausime 1,46.

Dabar remsimės trapecijų formule.

Čia turi būti teisinga nelygybė

$$\frac{6e}{12n^2} \leqslant 0{,}01,$$

t.y. $n \geqslant 10\sqrt{\frac{e}{2}}$. Tą nelygybę tenkina $n=12$. Taigi

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx \approx \frac{1}{12}\left(\frac{1+e}{2}+\sum_{i=1}^{11} f\left(\frac{i}{12}\right)\right) \approx 1{,}46$$

0,01 tikslumu.

2 pavyzdys. Apskaičiuosime $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx$ 0,01 tikslumu. Kadangi $f(x)=\sqrt{x^2+1}\sin x$, tai

$$f''(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\cos x+\frac{x^4}{(1+x^2)^{3/2}}\sin x$$

ir

$$|f''(x)| \leqslant \sqrt{\frac{4x^2}{x^2+1}+\frac{x^8}{(1+x^2)^3}} \leqslant \sqrt{4-\frac{4}{x^2+1}+1} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{4-2+1}=\sqrt{3}<2.$$

Vadinasi, taikant stačiakampių formulę, n turi tenkinti nelygybę

$$\frac{\sqrt{3}}{24n^2} \leqslant 0{,}01,$$

t.y.

$$n \geqslant \sqrt{\frac{100\sqrt{3}}{24}}=\frac{5}{\sqrt{2\sqrt{3}}}.$$

Akivaizdu, kad $n=3$ tenkina tą nelygybę, todėl

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx \approx \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} f\left(\frac{1}{3}\left(i-\frac{1}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{f\left(\frac{1}{6}\right)+f\left(\frac{3}{6}\right)+f\left(\frac{5}{6}\right)\right\}\approx 0{,}56$$

0,01 tikslumu.

Taikant trapecijų formulę, n turi tenkinti nelygybę

$$n \geqslant \frac{5}{\sqrt{\sqrt{3}}};$$

iš čia $n=4$.

Taigi

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\sin x\,dx \approx \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}\sin 1 + f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{2}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}\approx 0{,}56.$$

Remdamiesi išnagrinėtais pavyzdžiais, galime teigti, kad, taikant stačiakampių ir trapecijų formules, reikia atlikti maždaug to paties sudėtingumo skaičiavimus.

Pratimai

1. Raskite apytikslę integralo $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=\ln 2\approx 0{,}69315$ reikšmę pagal stačiakampių ir trapecijų formules, kai $n=10$.

2. Apskaičiuokite integralą $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ 0,001 tikslumu pagal trapecijų formulę.

3. Apskaičiuokite integralą $I=\int_0^4 x^2\,dx=\frac{4^3}{3}\approx 21{,}33$ pagal stačiakampių ir trapecijų formules, kai $n=10$.

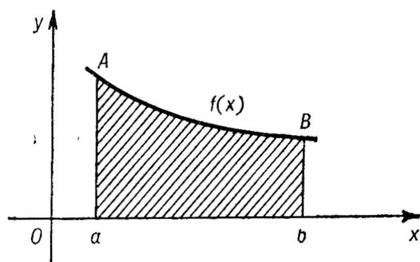
4. Apskaičiuokite integralą $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ pagal trapecijų formulę, padalijęs integravimo intervalą į 4 dalis.

V SKYRIUS

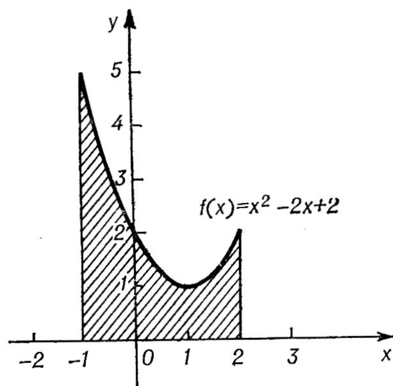
Apibrėžtinio integralo taikymai

§ 23. PLOKŠČIŲJŲ FIGŪRŲ PLOTŲ SKAIČIAVIMAS, REMIANTIS APIBRĖŽTINIU INTEGRALU

Remdamiesi apibrėžtinio integralo sąvoka, paaiškinsime plokščiųjų figūrų plotų skaičiavimo bendrąjį metodą. Kaip žinome (žr. IV skyr.), apibrėžtinis neneigiamos tolydžios funkcijos integralas yra atitinkamos kreivinės trapecijos plotas. Taip geometriškai aiškinamas apibrėžtinis integralas, tuo pagrįstas ir jo taikymas plokščiųjų figūrų plotui skaičiuoti.



22 pav.



23 pav.

Nagrinėsime kreivinę trapeciją $aABb$, kurios kraštą sudaro neneigiamos tolydžios funkcijos $y=f(x)$, $x \in [a; b]$, grafikas, Ox ašies atkarpa $[a; b]$ bei tiesių $x=a$ ir $x=b$ atkarpos (22 pav.). Tuo atveju, kaip žinome, kreivinės trapecijos plotas apskaičiuojamas pagal formulę

$$S=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime plotą plokščios figūros, apribotos linijomis $y=f(x)=x^2-2x+2$, $x=-1$, $x=2$ ir ašies Ox atkarpa $[-1; 2]$ (23 pav.).

Sprendimas. Duotoji plokščia figūra yra kreivinė trapecija, todėl jos plotą rasime pagal (1) formulę:

$$S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}-x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=6.$$

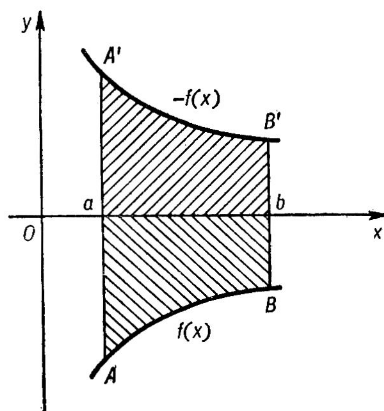
Sakykime, funkcija $y=f(x)$, $x\in[a;\,b]$, yra neteigiama ir tolydi. Tuomet funkcijos grafikas yra po ašimi Ox (24 pav.) ir

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant 0.$$

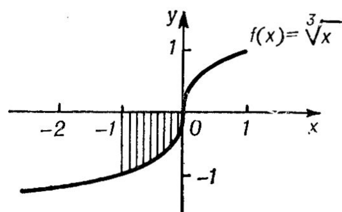
Išnagrinėję pagalbinę funkciją $y=-f(x)$, $x\in[a;\,b]$, rasime, kad plotas kreivinės trapecijos $aA'B'b$, apribotos funkcijos $y=-f(x)$ grafiku, ašies Ox atkarpa $[a;\,b]$ bei tiesių $x=a$ ir $x=b$ $(a<b)$ atkarpomis, yra apskaičiuojamas pagal (1) formulę, t. y.

$$S=-\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (2)$$

Dabar nagrinėsime kreivinę trapeciją $aABb$ (24 pav.), kurią riboja funkcijos f grafikas, ašies Ox atkarpa $[a;\,b]$ bei tiesių $x=a$ ir $x=b$ $(a<b)$ atkarpos. Kadangi funkcijos $y=-f(x)$ grafikas simetriškas ašies Ox atžvilgiu funkcijos $y=f(x)$ grafikui, tai kreivinės trapecijos $aABb$ ir $aA'B'b$ yra kongruenčios.



24 pav.



25 pav.

Kaip žinome, kongruenčių figūrų plotai yra lygūs, todėl ir kreivinės trapecijos $aABb$ plotą skaičiuosime pagal (2) formulę.

2 pavyzdys. Apskaičiuosime plotą figūros, apribotos linijomis $y=$ $=f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=-1$ ir ašimi Ox (25 pav.).

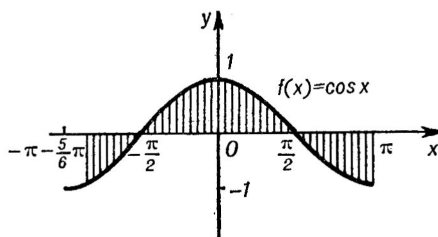
Sprendimas. Funkcijos $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x\in[-1;0]$, grafikas yra po ašimi Ox, todėl duotosios plokščios figūros plotą skaičiuosime pagal (2) formulę:

$$S=-\int_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}\,dx=-\frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_{-1}^{0}=\frac{3}{4}.$$

Sakykime, $f(x)$, $x\in[a;b]$, yra tolydi atkarpoje $[a;b]$ funkcija, kurios grafikas kerta ašį Ox baigtinį skaičių kartų. Remiantis (1) ir (2) formulėmis, plotas plokščiosios figūros, apribotos funkcijos $f(x)$ grafiku, ašies Ox atkarpa $[a;b]$ bei tiesių $x=a$ ir $x=b$ atkarpomis, randamas pagal formulę

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)|\,dx. \quad (3)$$

3 pavyzdys. Apskaičiuosime plotą plokščios figūros, kurią riboja ašies Ox atkarpa $\left[-\frac{5\pi}{6};\pi\right]$, funkcijos $f(x)=\cos x$ grafikas bei tiesių $x=-\frac{5\pi}{6}$ ir $x=\pi$ atkarpos (26 pav.).



26 pav.

Sprendimas. Išsprendę lygtį $\cos x=0$, matysime, kad funkcijos $y=\cos x$ grafikas atkarpoje $\left[-\frac{5\pi}{6};\pi\right]$ kerta ašį Ox taškuose $x_1=-\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{2}$. Taigi, remiantis (3) formule,

$$S=\int_{-\frac{5\pi}{6}}^{\pi}|\cos x|\,dx=$$

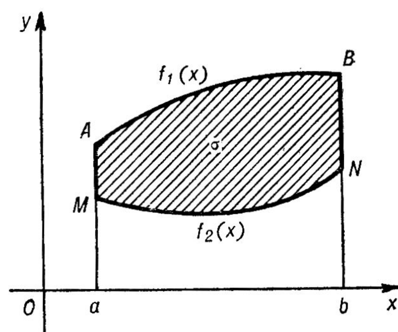
$$=-\int_{-\frac{5}{6}\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx=$$

$$=-\sin x\Big|_{-\frac{5}{6}\pi}^{-\frac{\pi}{2}}+\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{7}{2}.$$

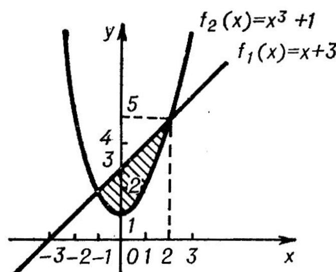
Dabar nagrinėsime figūrą σ, apribotą tiesių $x=a$ ir $x=b$ $(a<b)$ atkarpomis bei neneigiamų tolydžių funkcijų $f_1(x)$, $x\in[a;\ b]$, ir $f_2(x)$, $x\in[a;\ b]$, grafikais (27 pav.). Kadangi figūrą σ galime laikyti kreivinių trapecijų $aABb$ ir $aMNb$ skirtumu, tai, remdamiesi (1) formule, gauname šitokią figūros σ ploto formulę:

$$S=\int_a^b f_1(x)\,dx-\int_a^b f_2(x)\,dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]\,dx. \tag{4}$$

4 pavyzdys. Apskaičiuosime plotą figūros σ, apribotos linijomis $y=f_1(x)=x+3$ ir $y=f_2(x)=x^2+1$ (28 pav.).



27 pav.



28 pav.

Sprendimas. Išsprendę lygtį $x+3=x^2+1$, rasime funkcijų f_1 ir f_2 grafikų sankirtos taškų abscises $x_1=-1$ ir $x_2=2$. Remdamiesi (4) formule, rasime figūros σ plotą:

$$S=\int_{-1}^{2}[x+3-(x^2+1)]\,dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx=$$

$$=-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

Norint rasti sudėtingesnės plokščiosios figūros plotą, reikia stengtis išreikšti tą plotą tam tikrų kreivinių trapecijų plotų suma. Pavyzdžiui, figūros σ (29 pav.) plotą skaičiuotume pagal formulę

$$S=S_{aABb}-S_{aACc}-S_{cCBb}.$$

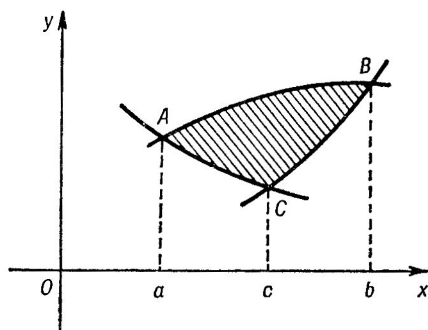
Sakykime, kreivės AB, BC ir AC yra grafikai atitinkamai funkcijų:

$$y=f(x),\ x\in[a;\ b];\ y=\varphi(x),\ x\in[a;\ c];\ y=\psi(x),\ x\in[c;\ b].$$

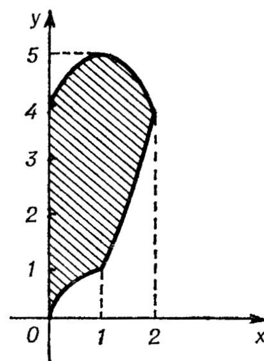
Tada

$$S=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^c \varphi(x)\,dx-\int_c^b \psi(x)\,dx. \tag{5}$$

5 pavyzdys. Rasime plotą plokščios figūros, apribotos linijomis $y=\sqrt{x}$, $x\in[0;\ 1]$, $y=x^2$, $x\in[1;\ 2]$, $y=-x^2+2x+4$, $x\in[0;\ 2]$ (30 pav.).



29 pav.



30 pav.

Sprendimas. Plotą skaičiuosime pagal (5) formulę:

$$S=\int_0^2 (-x^2+2x+4)\,dx-\int_0^1 \sqrt{x}\,dx-\int_1^2 x^2\,dx=$$

$$=-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+x^2\Big|_0^2+4x\Big|_0^2-\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{19}{3}.$$

Pratimas

1. Raskite plotus plokščiųjų figūrų, apribotų linijomis:

a) $y=6x-x^2$, $y=0$;

b) $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$;

c) $y=8+2x-x^2$, $y=2x+4$;

d) $y=x^3-4x$, $y=0$;

e) $y=2x+16$, $y=8-7x-x^2$, $x=0$;

f) $y^2-4x=0$, $x-y=0$;

g) $y^2=ax$, $x^2=by$;

h) $y^2=2x$, $2y=x^2$;

i) $y=\ln x$, $y=0$, $x=2$, $x=8$;

j) $y=\sin x$, $y=\frac{2}{\pi}x$;

k) $y=x^3$, $x+y=2$, $y=0$;

l) $y=\operatorname{tg} x$, $x=\frac{\pi}{3}$, $y=0$;

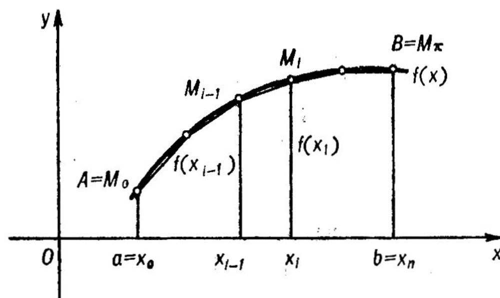
m) $y=\arcsin x$, $x=\frac{1}{2}$, $y=0$.

§ 24. KREIVĖS LANKO ILGIS

Sakykime, duota kreivė AB (31 pav.), kurios lygtis yra $y=f(x)$, $x\in[a;\ b]$, funkcija $f(x)$ – tolydžiai diferencijuojama atkarpoje $[a;\ b]$. Atkarpą $[a;\ b]$ padalysime taškais

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}\,i,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

į n vienodo ilgio atkarpų.



31 pav.

Per taškus x_i išvesime Oy ašiai lygiagrečias tieses. Jų susikirtimo su kreive AB taškus žymėsime M_i. Sujungę tuos taškus stygomis, gausime į kreivę AB įbrėžtą laužtinę $AM_1M_2\ \ldots\ M_{n-1}B$. Jos perimetrą žymėkime P_n. *Lanko AB ilgiu* vadinsime skaičių l, kuris yra perimetrų sekos (P_n) riba:

$$l=\lim_{n\to\infty}P_n.$$

Turinčią ilgį kreivę vadinsime *ištiesiama*.

Pastaba. Į kreivę AB įbrėžtomis laužtinėmis galime laikyti bet kokias laužtines. Tuomet įbrėžtų į duotąją kreivę laužtinių perimetrų sekos (P_n) ribą, kai $\lambda\to 0$, λ – didžiausias tų laužtinių grandžių ilgis, vadinsime kreivės lanko ilgiu, t. y.

$$l=\lim_{\lambda\to 0}P_n.$$

Dabar rasime formulę lanko AB ilgiui skaičiuoti. Nagrinėsime įbrėžtos į lanką AB laužtinės $AM_1M_2\ \ldots\ M_{n-1}B$ i-ąją grandį, kurios galai yra taškai $M_{i-1}\big(x_{i-1};\ f(x_{i-1})\big)$ ir $M_i\big(x_i;\ f(x_i)\big)$. Remdamiesi atstumo tarp dviejų taškų formule, rasime i-osios grandies $M_{i-1}M_i$ ilgį:

$$l_i=|M_{i-1}M_i|=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\big(f(x_i)-f(x_{i-1})\big)^2}. \tag{1}$$

Kadangi funkcija f yra tolydžiai diferencijuojama atkarpoje $[a;\ b]$, tai, remiantis Lagranžo formule,

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(\xi_i)(x_i-x_{i-1}); \tag{2}$$

čia ξ_i – tam tikras intervalo $]x_{i-1};\ x_i[$ taškas.

Įrašę (2) reiškinį į (1) formulę, gausime

$$l_i = \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Taigi laužtinės $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ perimetras yra

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Gavome tolydžiosios funkcijos $\sqrt{1+(f'(x))^2}$ integralinę sumą atkarpoje $[a; b]$. Kadangi tos sumos riba, kai $n\to\infty$, egzistuoja, tai, remiantis apibrėžimu,

$$l = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+(f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Taigi

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{3}$$

Nagrinėsime integralą su kintamu viršutiniu rėžiu

$$l(x) = \int_a^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt.$$

Kadangi pointegralinė funkcija yra tolydi, tai, remiantis integralo diferencijavimo pagal viršutinį rėžį teorema (žr. § 18),

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

Iš paskutinio sąryšio išplaukia, kad lanko diferencialo formulė yra

$$dl = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

arba

$$dl = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}. \tag{4}$$

Sakykime, kreivė aprašyta parametrinėmis lygtimis:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

φ ir Ψ turi tolydžias išvestines atkarpoje $[\alpha; \beta]$. Tada (4) formulė atrodys šitaip:

$$dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt,$$

o formulė lanko ilgiui skaičiuoti

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt. \tag{5}$$

1 pavyzdys. Apskaičiuosime kreivės $y=x^{3/2}$ lanko tarp taškų $A(0;0)$ ir $B(1;1)$ ilgį.

Sprendimas. Lanko ilgį rasime pagal (3) formulę. Kadangi $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$, tai

$$l=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{8}{27}\left[\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_0^1=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}.$$

2 pavyzdys. Rasime apskritimo

$$x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

ilgį.

Sprendimas. Kadangi

$$x'=-R\sin t,\ y'=R\cos t,$$

tai, remdamiesi (5) formule, rasime apskritimo ketvirtadalio ilgį:

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t}\,dt=R\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}R.$$

Vadinasi, apskritimo ilgis $C=4l=2\pi R$.

3 pavyzdys. Rasime cikloidės

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

vienos arkos ilgį.

Sprendimas. Kadangi $x'=a(1-\cos t)$, $y'=a\sin t$, tai, remiantis (5) formule,

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a.$$

Pratimas

1. Apskaičiuokite šių kreivių lankų ilgius:

a) $y=\sqrt{x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

b) $y=\ln x$, $\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{8}$;

c) $y=e^x$, $0\leqslant x\leqslant 1$;

d) $y=\ln\cos x,\quad 0\leqslant x\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$;

e) $x=a(\cos t+t\sin t),\ y=a(\sin t-t\cos t),\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

f) $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant\ln\pi$;

g) $x=\frac{1}{3}t^3-t,\ y=t^2+2,\ 0\leqslant t\leqslant 3$;

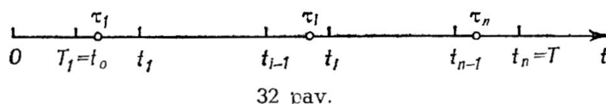
h) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ tarp taškų, kurių abscisės lygios 0 ir a;

i) $y=\ln\sin x$ tarp taškų, kurių abscisės lygios $\frac{\pi}{2}$ ir $\frac{\pi}{3}$;

j) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

§ 25. APIBRĖŽTINIO INTEGRALO PRITAIKYMAI FIZIKINIUOSE IR TECHNINIUOSE UŽDAVINIUOSE

1. Kelio radimo uždavinys. Sakykime, materialus taškas juda tiese ir jo momentinis greitis yra $v=v(t)$. Reikia rasti kelią, kurį taškas nueis per laikotarpį nuo $t=T_1$ iki $t=T_2$ (32 pav.).



32 pav.

Paprasčiausiu atveju, kai momentinis greitis yra pastovus, t. y. $v(t)=$ $=v_0=\text{const}$, taško nueitas kelias (remiantis žinomu iš fizikos kurso apibrėžimu) yra greičio ir judėjimo laiko sandauga: $s=v_0(T_2-T_1)$.

Bendruoju atveju, kai momentinis greitis nėra pastovus, darome šitaip

Laiko intervalą $[T_1;\ T_2]$ padalijame taškais $t_0=T_1,\ t_1,\ \dots,\ t_{n-1},\ t_n=$ $=T_2\ (t_0<t_1<\ \dots\ <t_n)$ į n atkarpų $[t_{i-1};\ t_i]$, $i=1, 2, \dots, n$, kurių ilgiai

$$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}=\frac{T_2-T_1}{n}$$

yra lygūs.

Dabar kiekvienoje atkarpoje $[t_{i-1};\ t_i]$ imame bet kokį tašką τ_i ir sudarome sumą

$$\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i. \tag{1}$$

Kiekvienas tos sumos dėmuo $v(\tau_i)\Delta t_i$ yra apytikslė reikšmė kelio, kurį nueina taškas per laikotarpį nuo $t=t_{i-1}$ iki $t=t_i$. Taigi taško nueitas kelias per laikotarpį nuo $t=T_1$ iki $t=T_2$ apytiksliai lygus (1) sumai.

Aišku, artinys bus tuo tikslesnis, kuo trumpesnės atkarpos $[t_{i-1}; t_i]$, $i=1, 2, 3, \ldots, n$. Todėl kelias s, kurį taškas nueina per laikotarpį $[T_1; T_2]$, yra apibrėžiamas kaip (1) sumos riba, kai

$$s=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\,\Delta t_i.$$

Kadangi ta riba, remiantis apibrėžimu, yra funkcijos $v(t)$ apibrėžtinis integralas atkarpoje $[T_1; T_2]$, tai kelias, kurį taškas nueina per laikotarpį $[T_1; T_2]$, randamas iš formulės

$$s=\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,dt. \qquad (2)$$

1 pavyzdys. Kūnas juda tiesiai greičiu $v(t)=(3t^2+4t+1)$ m/s. Rasime kelią, kurį jis nueina per pirmąsias 3 s.

Sprendimas. Remiantis (2) formule,

$$\mathrm{s}=\int_0^3 (3t^2+4t+1)\,dt=(t^3+2t^2+t)\Big|_0^3=48 \text{ (m)}.$$

2 pavyzdys. Taškas juda tiesiai greičiu $v(t)=at+v_0$. Rasime kelią, kurį jis nueina per laikotarpį nuo $t=T_1$ iki $t=T_2$.

Sprendimas. Remiantis (2) formule,

$$s=\int_{T_1}^{T_2}(at+v_0)\,dt=\left(\frac{at^2}{2}+v_0t\right)\Big|_{T_1}^{T_2}=\frac{a}{2}(T_2^2-T_1^2)+v_0(T_2-T_1).$$

3 pavyzdys. Kūnas juda tiesiai greičiu $v(t)=16\,t-4t^2$. Rasime kelią, kurį jis nueina per laikotarpį nuo judėjimo pradžios iki pabaigos.

Sprendimas. Kūno greitis pradiniu ir galiniu momentais lygus nuliui. Rasime judėjimo pabaigos momentą. Tuo tikslu kūno greitį prilyginame nuliui ir, išsprendę lygtį, gauname:

$$16\,t-4\,t^2=0,\ t_1=0,\ t_2=4.$$

Toliau, remdamiesi (2) formule, randame:

$$s=\int_0^4(16\,t-4\,t^2)\,dt=\left(8\,t^2-\frac{4}{3}\,t^3\right)\Big|_0^4=\frac{178}{3}.$$

Pratimai

1. Kūnas juda tiesiai greičiu $v(t)=(2t^2+1)$ m/s. Raskite kelią, kurį jis nueina per pirmąsias 5 s.

2. Kūnas juda tiesiai greičiu $v(t)=(2t^3+1)$ m/s. Raskite kelią, kurį jis nueina per laikotarpį nuo $t_1=1$ s iki $t_2=3$ s.

3. Kūnas juda tiesiai greičiu $v(t)=(12t-3t^2)$ m/s. Raskite kelią, kurį jis nueina per laikotarpį nuo judėjimo pradžios iki pabaigos.

4. Du kūnai pradėjo judėti tiesiai tuo pačiu momentu ir iš to paties taško greičiais $v_1(t)=(6t^2+4t)$ m/s ir $v_2(t)=4t$ m/s. Po kiek sekundžių atstumas tarp jų bus 250 m?

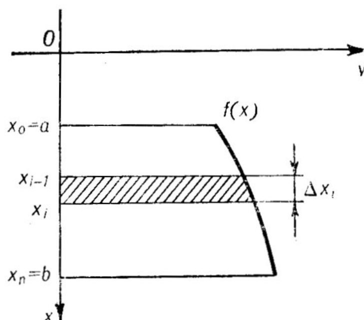
5. Kūnas juda tiesiai greičiu $v(t)=(4t+a)$ m/s. Raskite a, kai žinoma, kad per pirmąsias 2 s nueitas kelias lygus 48 m.

6. Kūnas juda tiesiai greičiu $v(t)=(6t+4)$ m/s. Raskite kelią, kurį jis nueina per trečiąją sekundę.

7. Taškas juda tiesiai greičiu $v(t)=(9{,}8\,t-0{,}003\,t^2)$ m/s. Raskite kelią, kurį jis nueina per laikotarpį nuo $t_1=0$ s iki $t_2=5$ s.

8. Taškas juda tiesiai greičiu $v(t)=(Rt+a\sqrt{t})$ m/s. Raskite kelią, kurį tas taškas nueina per laikotarpį nuo $t_1=0$ s iki $t_2=4$s.

2. Skysčio slėgio jėgos uždavinys. Sakykime, kreivinės trapecijos formos plokštelė vertikaliai panardinta į skystį, kurio tankis lygus ρ; jos šoninės kraštinės lygiagrečios skysčio paviršiui ir tų kraštinių atstumai nuo skysčio paviršiaus atitinkamai lygūs a ir b (33 pav.). Reikia rasti skysčio slėgio į plokštelę jėgą.



33 pav.

Jeigu plokštelė horizontali ir jos atstumas nuo skysčio paviršiaus lygus h, tai skysčio slėgio į tokią plokštelę jėga P (niutonais) lygi svoriui skysčio stulpelio, kurio pagrindas – duotoji plokštelė, o aukštinė – gylis h, t.y.

$$P=g\rho hS; \tag{1}$$

čia S – plokštelės plotas.

Jeigu plokštelė į skystį panardinta vertikaliai, tai skysčio slėgio į plokštelę negalėsime rasti iš (1) formulės. Tuo atveju skysčio slėgis į plokštelės ploto vienetą keičiasi, didėjant gyliui, t.y. priklauso nuo plokštelės atstumo nuo skysčio paviršiaus.

Spręsdami uždavinį, remsimės tuo, kad pagal Paskalio dėsnį slėgis skystyje visomis kryptimis, taigi ir į vertikalią plokštelę, yra vienodas.

Norėdami išspręsti uždavinį, plokštelę lygiagrečiomis skysčio paviršiui (t.y. lygiagrečiomis ašiai Oy) tiesėmis padalysime į n dalių (mažas horizontalias juosteles). Tieses išvesime per taškus $x_0=a,\ x_1,\ \ldots,x_{n-1},x_n=b$; čia

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}\,i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Imsime juostelę (33 paveiksle ji užbrūkšniuota), kuri yra gylyje x_i. Jeigu ji pakankamai siaura, tai slėgį visose jos dalyse galime laikyti apytiksliai vienodu, o pačią juostelę laikyti stačiakampiu, kurio aukštinė yra $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, o pagrindas sutampa su apatiniu juostelės pagrindu. Nesunku pastebėti, kad stačiakampio pagrindo ilgis yra abscisės x funkcija; ją žymėsime $f(x)$, $x \in [a; b]$. Taigi slėgio į i-ąją juostelę jėgą P_i galime rasti iš (1) formulės, t.y.

$$P_i \approx g \rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

Sudėję skysčio slėgio į visas juosteles jėgas, gausime apytikslę skysčio slėgio į visą plokštelę jėgos reikšmę:

$$P \approx \sum_{i=1}^{n} g \rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

Ta reikšmė tuo tikslesnė, kuo trumpesnės atkarpos $[x_{i-1}; x_i]$, į kurias padalyta atkarpa $[a; b]$.

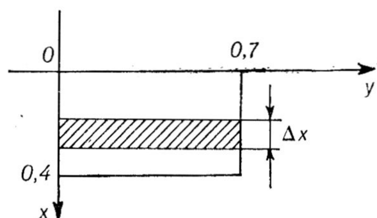
Taigi tiksli skysčio slėgio į plokštelę jėgos reikšmė yra

$$P = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} g \rho f(x_i) x_i \Delta x_i.$$

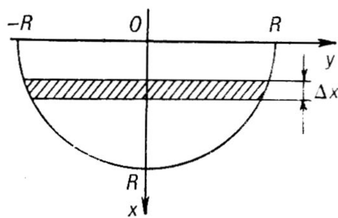
Remiantis apibrėžimu, ta riba yra funkcijos $x f(x)$ apibrėžtinis integralas atkarpoje $[a; b]$, todėl skysčio slėgio į plokštelę jėga yra

$$P = g \int_a^b \rho x f(x)\, dx. \qquad (2)$$

4 pavyzdys. Akvariumas yra stačiakampio gretasienio formos. Rasime akvariumą užpildančio vandens (vandens tankis yra 1000 kg/m^3) slėgio į vieną vertikalią sienelę jėgą, kai sienelės matmenys yra 0,4 m × 0,7 m (34 pav.).



34 pav.



35 pav.

Sprendimas. Koordinačių sistemą parinksime taip, kad ašys Oy ir Ox eitų per vertikalios akvariumo sienelės viršutinį pagrindą ir šoninę kraštinę (34 pav.). Ieškodami vandens slėgio į sienelę jėgos, remsimės

(2) formulė. Sienelė yra stačiakampio formos, todėl $f(x)=0{,}7$, $x\in[0;\ 0{,}4]$. Kadangi integravimo rėžiai yra $a=0$, $b=0{,}4$, tai

$$P=g\int_0^{0,4} 1000\cdot 0{,}7\cdot x\,dx = 700\,g\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,4}=56\,g.$$

Įrašę $g\approx 9{,}8$ m/s², gausime $P\approx 548{,}8$ (N).

5 pavyzdys. Rasime alyvos (jos tankis yra 900 kg/m³) slėgio į vertikalią sienelę jėgą, jei ta sienelė yra pusskritulio formos, jos spindulys $R=5$ m ir skersmuo sutampa su alyvos paviršiumi.

Sprendimas. Koordinačių sistemą parinksime taip, kaip pavaizduota 35 paveiksle. Kadangi sienelės spindulys $R=5$, tai $f(x)=\sqrt{5^2-x^2}$, $x\in[0;\ 5]$. Ieškodami slėgio jėgos, remsimės (2) formule. Šiuo atveju $\rho=900$ kg/m³, $a=0$, $b=5$, todėl

$$P=2g\int_0^5 900\,x\sqrt{5^2-x^2}\,dx=900\,g\cdot\frac{2}{3}\,(5^2-x^2)^{3/2}\Big|_5^0=$$

$$=600\,g\cdot 5^3=75\,000\,g.$$

Kadangi $g\approx 9{,}8$ m/s², tai $P\approx 735$ kN.

Pratimai

9. Sakykime, šliuzas yra pilnas vandens. Kokia jėga vanduo slegia šliuzo sienelę, kurios ilgis lygus 20 m, o aukštis – 5 m.

10. Sakykime, vanduo siekia užtvankos viršų. Kokia jėga vanduo slegia užtvanką, jeigu ji yra trapecijos formos, jos viršutinis pagrindas lygus a, apatinis – b ($a>b$), o aukštinė – H. Apskaičiuokite tą jėgą, kai $a=400$ m, $b=200$ m, $H=20$ m.

11. Kokia jėga vanduo slegia vertikalią pusskritulio formos sienelę, jeigu jos spindulys $R=6$ m, o skersmuo sutampa su vandens paviršiumi?

12. Kokia jėga vanduo slegia vertikalų stačiakampį šliuzą ir apatinę jo dalį, jeigu šliuzo pagrindas lygus 10 m, aukštinė – 6 m.

13. Benzinas yra ritinio formos inde, kurio aukštis $h=3{,}5$ m, o spindulys $r=1{,}5$ m. Kokia jėga benzinas slegia sieneles, jeigu benzino tankis $\rho=900$ kg/m³?

14. Trikampė plokštė, kurios pagrindas lygus a, o aukštinė H, vertikaliai panardinta į vandenį (pagrindas sutampa su vandens paviršiumi). Raskite vandens slėgio į plokštę jėgą.

15. Horizontalus vamzdis, kurio skersmuo yra 6 m, iki pusės pripiltas vandens. Kokia jėga vanduo slegia vertikalią vamzdį uždarančią sklendę?

16. Vertikali ritinio formos cisterna, kurios skersmuo yra 3 m, o aukštinė – 4 m, pilna vandens. Kokia jėga slegia cisternos šoninį paviršių?

17. Pilnas vandens akvariumas yra stačiakampio gretasienio formos; jo pagrindo kraštinės lygios 0,9 m ir 0,6 m, aukštinė lygi 0,4 m. Raskite vandens slėgio į akvariumo dugną ir sieneles jėgą.

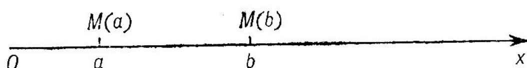
3. Kintančios jėgos darbas. Sakykime, jėgos F veikiamas materialus taškas juda tiesiai. Jeigu veikiančioji jėga yra pastovi, o nueitas kelias lygus s, tai, kaip žinome iš fizikos kurso, tos jėgos atliktas darbas yra

$$A=F\cdot s. \tag{1}$$

Dabar nagrinėsime kintančios jėgos darbą. Sakykime, materialus taškas juda ašimi Ox, veikiamas jėgos, kurios projekcija į ašį Ox yra x funkcija $f(x)$. Laikysime, kad f yra tolydi. Sakykime, jėgos F veikiamas materialus taškas persikėlė iš taško $M(a)$ į tašką $M(b)$ (36 pav.). Įrodysime, kad tuo atveju darbas randamas iš formulės

$$A=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

Atkarpą $[a; b]$ padalysime taškais $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ į n dalių $[x_{i-1}; x_i]$, kurių ilgiai $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ yra vienodi.



36 pav.

Kiekvienoje atkarpoje $[x_{i-1}; x_i]$ galime jėgos darbą apytiksliai rasti iš (1) formulės, t.y. laikyti jį lygiu $f(\xi_i)\,\Delta x_i$; čia ξ_i – bet kuris atkarpos $[x_{i-1}; x_i]$ taškas.

Tad jėgos darbas atkarpoje $[a; b]$ apytiksliai randamas pagal formulę

$$A\approx\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Artinys tuo tikslesnis, kuo trumpesnės atkarpos $[x_{i-1}; x_i]$, į kurias padalyta atkarpa $[a; b]$. Todėl, toje lygybėje perėję prie ribos, kai $n\to\infty$, gausime

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

Taigi kintančios jėgos darbas yra randamas pagal (3) formulę.

6 pavyzdys. Ištemptos, kad pailgėtų 0,05 m, spyruoklės tamprumo jėga lygi 3 N. Kokį darbą reikia atlikti, norint spyruoklę tiek ištempti?

Sprendimas. Pagal Huko dėsnį suspaudžianti arba ištempianti spyruoklę jėga F yra proporcinga jos ilgio pokyčiui, t.y. $F=kx$; čia x – to pokyčio reikšmė, o k – proporcingumo koeficientas. Remiantis sąlyga, $3=k\cdot 0{,}05$, t.y. $k=60$, taigi $F=60x$.

Remiantis (3) formule,

$$A=\int_0^{0,05} 60\,x\,dx=30\,x^2\Big|_0^{0,05}=0{,}075 \text{ (J)}.$$

7 pavyzdys. Ramybės būsenoje spyruoklės ilgis lygus 20 cm; 10 kgf jėga ją ištempia 2 cm. Rasime darbą, kurį reikia atlikti, norint ištempti spyruoklę nuo 25 iki 35 cm.

Sprendimas. Uždavinio duomenis išreikšime SI sistemos vienetais: 2 cm = 0,02 m; 20 cm = 0,2 m; $F = 10$ kgf = 98,1 N; 25 cm = 0,25 m ir 35 cm = 0,35 m. Remiantis uždavinio sąlygomis ir Huko dėsniu, $98{,}1 = k \cdot 0{,}02$, arba $k = 4905$. Taigi $F = 4905x$. Kadangi šiuo atveju $a = 0{,}25 - 0{,}2 = 0{,}05$ ir $b = 0{,}35 - 0{,}2 = 0{,}15$, tai, remiantis (3) formule,

$$A = 4905 \int_{0,05}^{0,15} x\,dx = 4905 \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,05}^{0,15} \approx 49{,}05 \text{ (J)}.$$

Pratimai

18. Kokį darbą reikia atlikti, norint suspausti spyruoklę 0,1 m, jeigu jai suspausti 0,01 m reikia 78 N jėgos?

19. Lingėms išlinkstant 1 cm, atliekamas 2 J darbas. Kokį darbą reikia atlikti, norint išlenkti linges 3 cm?

20. Spyruoklę veikianti jėga yra proporcinga jos deformacijai ir 4 kg jėga suspaudžia spyruoklę 1 cm. Raskite darbą, atliktą spyruoklę suspaudus 25 cm.

21. Koks darbas atliekamas, suspaudžiant sraigtinę spyruoklę 6 cm, jeigu 0,32 kgf jėga ją suspaudžia 0,2 cm?

22. Koks darbas atliekamas, ištempiant spyruoklę 0,45 m, jeigu 50 N jėga ją ištempia 0,02 m?

23. Koks darbas atliekamas, suspaudžiant spyruoklę 5 cm, jeigu, suspaudžiant ją 1 cm, atliekamas 10 kgf · m darbas.

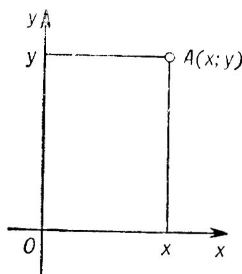
24. Spyruoklės deformacija yra proporcinga veikiančiai jėgai. Raskite darbą, atliktą, suspaudus spyruoklę 7 cm, jeigu 1 kgf jėga ją suspaudžia 1 cm.

25. Raskite darbą, atliktą suspaudus spyruoklę 4 cm, jeigu 2 N jėga tą spyruoklę suspaudžia 1 cm.

26. Raskite darbą, atliktą ištempus spyruoklę 6 cm, jeigu 6 N jėga ją ištempia 2 cm.

27. Raskite darbą, atliktą ištempus spyruoklę iki 0,2 m, jeigu pradinis spyruoklės ilgis buvo 0,15 m, o 80 N jėga ją ištempia 0,02 m.

4. Statiniai momentai ir masių centro koordinatės. Sakykime, plokštumoje duota stačiakampė Dekarto koordinačių sistema xOy. Priminsime, kad *materialaus taško* $A(x; y)$, kurio masė yra m, *statiniais momentais*



37 pav.

ašių Ox ir Oy atžvilgiu (37 pav.) vadiname to taško masės ir atitinkamai to taško ordinatės bei abscisės sandaugas, t.y.

$$M_x = my, \quad M_y = mx.$$

Jeigu turime n materialių taškų $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, ..., $A_n(x_n;\ y_n)$, kurių masės yra $m_1, m_2, ..., m_n$, tai *tos sistemos statiniai momentai* ašių Ox ir Oy atžvilgiu

$$M_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i,\quad M_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Tokios materialių taškų sistemos *masių centru* vadinamas taškas, pasižymintis šia savybe: jeigu jame bus sukoncentruota visos sistemos masė $m=\sum_{i=1}^{n} m_i$, tai to taško statinis momentas bet kurios ašies atžvilgiu bus lygus duotosios taškų sistemos statiniam momentui tos pačios ašies atžvilgiu. Todėl, pažymėję sistemos masių centrą simboliu $C(x_C;\ y_C)$, gausime:

$$M_x=\sum_{i=1}^{n} m_i y_i=my_C, \tag{1}$$

$$M_y=\sum_{i=1}^{n} m_i x_i=mx_C. \tag{2}$$

Taigi materialių taškų sistemos masių centro koordinatės randamos pagal formules:

$$x_C=\frac{M_y}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}, \tag{3}$$

$$y_C=\frac{M_x}{m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}. \tag{4}$$

Linijos arba plokščiosios figūros statinius momentus ir masių centro koordinates rasime, remdamiesi apibrėžtiniu integralu.

Plokščios kreivės statiniai momentai ir masių centro koordinatės. Sakykime, ilgio l kreivė AB yra tolydžiai diferencijuojamos funkcijos $f(x)$, $x\in[a;\ b]$, grafikas. Laikysime kreivę AB vienalyte, t.y. linijinį tankį ρ pastoviu. Jeigu $\rho=1$, tai tos kreivės masė lygi kreivės ilgiui. Kreivę padalysime į dalis, kurių ilgiai yra Δl_i, ir jas laikysime materialiais taškais, kurių masės $\Delta m_i=\Delta l_i$ ir atstumai nuo ašies Ox lygūs y_i, o iki ašies Oy lygūs x_i. Todėl

$$\Delta M_{x_i}=y_i\cdot\Delta m_i=y_i\,\Delta l_i,\quad \Delta M_{y_i}=x_i\cdot\Delta m_i=x_i\,\Delta l_i.$$

Kadangi $\Delta l_i \approx \sqrt{1+(f'(x_i))^2}\,\Delta x_i$, tai

$$\Delta M_{x_i} \approx f(x_i)\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\,\Delta x_i,$$

$$\Delta M_{y_i} \approx x_i\sqrt{1+(f'(x_i))^2}\,\Delta x_i.$$

Sudėję visus atitinkamus dėmenis (jų yra tiek, į kiek dalių padalyta kreivė AB) ir perėję prie ribos, gausime

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \tag{5}$$

$$M_y = \int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{6}$$

Be to,

$$m = l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{7}$$

Remdamiesi (3) – (7) lygybėmis, gausime formules plokščios kreivės masių centro koordinatėms skaičiuoti:

$$x_C = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}, \tag{8}$$

$$y_C = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}. \tag{9}$$

Pastaba. Jeigu tankis ρ yra pastovus, bet $\rho \neq 1$, tai, norint rasti plokščios kreivės statinius momentus ir masę, reikia dešiniąsias (5) – (7) formulių puses padauginti iš ρ. Masių centro koordinačių (8) ir (9) formulės nesikeičia.

Remdamiesi (9) formule, įrodysime vieną svarbų geometrinį rezultatą. Kadangi

$$y_C \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

tai, padauginę paskutinę lygybę iš 2π, gausime

$$S=2\pi y_C l,$$

nes kreivės lanko ilgis apskaičiuojamas pagal formulę

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

o sukinio paviršiaus plotas – pagal formulę

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

Taigi įrodėme šitokį teiginį.

Paviršiaus, gauto sukant kreivę apie ašį, esančią vienoje plokštumoje su ta kreive ir nekertančią jos, plotas lygus lanko ilgiui, padaugintam iš ilgio apskritimo, kurį nubrėžia sukdamasis lanko masių centras. Tas teiginys vadinamas pirmąja Guldeno teorema.

8 pavyzdys. Rasime pusapskritimio $y=\sqrt{R^2-x^2}$ $(-R\leqslant x\leqslant R)$ statinius momentus koordinačių ašių atžvilgiu ir masių centro koordinates.

Sprendimas. Kadangi $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, tai $\sqrt{1+(y')^2}=\dfrac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$. Todėl, remiantis (5) ir (6) formulėmis,

$$M_x=\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=R\int_{-R}^{R}dx=2R^2,$$

$$M_y=\int_{-R}^{R}x\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=-R\sqrt{R^2-x^2}\,\Big|_{-R}^{R}=0.$$

Pusapskritimio ilgis lygus πR, todėl, remiantis (8) ir (9) formulėmis, masių centro koordinatės yra

$$y_C=\frac{2R^2}{\pi R}=\frac{2R}{\pi},\quad x_C=\frac{0}{\pi R}=0.$$

Taigi $C\left(0;\ \dfrac{2R}{\pi}\right)$.

9 pavyzdys. Rasime apskritimo $x^2+y^2=R^2$ lanko pirmajame ketvirtyje masių centro koordinates.

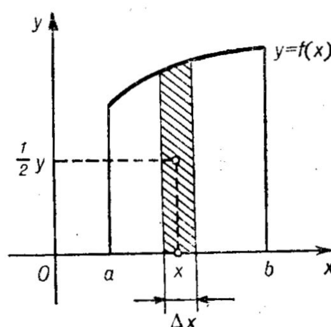
Sprendimas. Duotoji kreivė yra simetriška pirmojo koordinatinio kampo pusiaukampinės atžvilgiu, todėl tos kreivės masių centro ordinatė ir abscisė yra lygios. Ieškodami masių centro koordinačių, remsimės pirmąja Guldeno teorema. Aišku, sukdami apskritimo ketvirtį apie ašį,

gausime pusę sferos, todėl jos plotas bus $2\pi R^2$. Kadangi apskritimo ketvirčio ilgis lygus $\frac{\pi R}{2}$, tai, remiantis teorema,

$$2\pi R^2 = 2\pi y_C \cdot \frac{\pi R}{2},$$

t.y. $y_C = \frac{2R}{\pi}$.

Taigi centras yra taškas $C\left(\frac{2R}{\pi};\ \frac{2R}{\pi}\right)$.



38 pav.

Plokščios figūros statiniai momentai ir masių centro koordinatės. Sakykime, duota kreivinė trapecija, apribota neneigiamos funkcijos $y=f(x)$, $x \in [a;\ b]$, grafiku, ašimi Ox bei tiesėmis $x=a$ ir $x=b$. Toje trapecijoje yra tolydžiai pasiskirsčiusi masė, kurios tankis $\rho=1$. Tada kreivinės trapecijos masė yra lygi jos plotui. Ieškodami kreivinės trapecijos statinių momentų M_x ir M_y, padalysime ją lygiagrečiomis ordinačių ašiai tiesėmis į n dalių (žr. 38 pav.). Tieses išvesime per taškus

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\, i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Vienos dalies masė yra $\Delta S_i \approx y_i\, \Delta x_i$. Jeigu masę sukoncentruosime masių centre $\left(x_i;\ \frac{y_i}{2}\right)$, tai gausime

$$\Delta M_{x_i} = y_i\, \Delta x_i \cdot \frac{y_i}{2} = \frac{y_i^2}{2}\, \Delta x_i,$$

$$\Delta M_{y_i} = y_i\, \Delta x_i \cdot x_i = x_i y_i\, \Delta x_i.$$

Susumavę visų i atžvilgiu ir perėję prie ribos, gausime

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2\, dx, \tag{10}$$

$$M_y = \int_a^b xy\, dx. \tag{11}$$

Remdamiesi (3) ir (4) formulėmis, rasime masių centro formules

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xy\,dx}{\int_a^b y\,dx}, \qquad (12)$$

$$y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,dx}{\int_a^b y\,dx}. \qquad (13)$$

Padauginę paskutinę lygybę iš 2π, gausime

$$2\pi y_C \cdot m = \pi \int_a^b y^2\,dx. \qquad (14)$$

Akivaizdu, kad (14) lygybės dešinėje pusėje yra sukimosi kūno tūris. Taigi

$$V = S \cdot 2\pi y_C,$$

t.y. tūris kūno, gauto sukant kreivinę trapeciją apie abscisių ašį, yra lygus tos trapecijos ploto ir apskritimo, kurį nubrėžia sukdamasis jos masių centras, ilgio sandaugai. Tas teiginys vadinamas antrąja Guldeno teorema.

10 pavyzdys. Plokštelė apribota viena cikloidės $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$, arka ir jos pagrindu. Rasime tos plokštelės statinį momentą ašies Ox atžvilgiu.

Sprendimas. Remiantis (10) formule,

$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3\,dt = \frac{5a^3}{2}\pi.$$

11 pavyzdys. Rasime pusskritulio

$$x^2+y^2 \leqslant r^2, \; y \geqslant 0,$$

masių centro koordinates.

Sprendimas. Ieškodami ordinatės, remsimės antrąja Guldeno teorema: $y_C = \frac{V}{2\pi S}$. Kadangi rutulio tūris $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, o pusskritulio plotas $S = \frac{\pi r^2}{2}$, tai

$$y_C = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2\pi \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi}.$$

Kadangi figūra yra simetriška ordinačių ašies atžvilgiu, tai $x_C=0$. Taigi $C\left(0; \frac{4r}{3\pi}\right)$.

28. Raskite sraigtinės linijos $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0\leqslant x\leqslant a$, statinį momentą ašies Ox atžvilgiu.

29. Raskite parabolės lanko $y^2=2x$ $(y>0)$, $0\leqslant x\leqslant 2$, statinius momentus ašių Ox ir Oy atžvilgiu.

30. Raskite kosinusoidės lanko $y=\cos x$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$, statinį momentą ašies Ox atžvilgiu.

31. Raskite figūros, apribotos kreive $y=2\sqrt{x}$, ašimi Ox ir tiese $x=1$, masių centrą.

32. Raskite figūros, apribotos linijomis $y^2=20x$ ir $x^2=20y$, masių centrą.

33. Raskite vienos cikloidės arkos $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, masių centrą.

34. Raskite figūros, apribotos elipsės $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ lanku pirmajame ketvirtyje bei koordinačių ašimis, masių centrą.

35. Raskite figūros, apribotos linijomis $y=4-x^2$, $y=0$, masių centro koordinates.

36. Remdamiesi Guldeno teorema, raskite pusapskritimio, kurio spindulys yra a, masių centrą.

37. Remdamiesi Guldeno teorema, raskite stačiojo kūgio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą, kai kūgio aukštinė yra H, o pagrindo spindulys – r.

38. Lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi a, sukamas apie ašį, nutolusią nuo trikampio masių centro atstumu d $(d>a)$. Remdamiesi Guldeno teorema, raskite sukinio tūrį ir paviršiaus plotą.

VI SKYRIUS

Kombinatorika ir Niutono binomo formulė

§ 26. GRETINIAI, KĖLINIAI, DERINIAI

1. Paprasčiausių kombinatorikos uždavinių pavyzdžiai. *Kombinatorikos uždaviniais* priimta vadinti tokius uždavinius, kuriuose reikia rasti, keliais būdais galima išpildyti tą arba kitą reikalavimą, sąlygą, ką nors išrinkti.

Išnagrinėsime kelis būdingus kombinatorikos uždavinius.

1 pavyzdys. Grupėje yra 20 moksleivių. Keliais būdais galima išrinkti komjaunimo grupės sekretorių ir proforgą, jeigu kiekvieną moksleivį galima išrinkti tik vieną kartą (visi grupės moksleiviai komjaunuoliai)?

Sprendimas. Sakykime, iš pradžių renkamas sekretorius. Juo gali būti išrinktas kiekvienas moksleivis. Taigi sekretorius gali būti išrinktas 20 būdų. Tada proforgu gali būti bet kuris iš likusių 19 moksleivių. Kiekvienas iš 20 sekretoriaus rinkimo būdų gali derintis su kiekvienu iš 19 proforgo rinkimo būdų. Todėl sekretorių ir proforgą galima išrinkti $20 \cdot 19 = 380$ būdų.

2 pavyzdys. Susirinkime norėjo pasisakyti 4 žmonės. Keliais būdais galima sudaryti oratorių sąrašą?

Sprendimas. Pirmąjį oratorių galima parinkti keturiais būdais; antrąjį, aišku, – trimis būdais. Į trečiąją vietą oratorių sąraše dabar pretenduos jau tik du žmonės, taigi trečiąjį oratorių galima parinkti dviem būdais. Ketvirtajam oratoriui nėra ko rinktis: jis kalbės paskutinis. Kadangi kiekvienas pirmojo oratoriaus išrinkimo būdas gali derintis su bet kuriuo antrojo oratoriaus išrinkimo būdu ir su bet kuriuo iš dviejų galimų trečiojo oratoriaus išrinkimo būdų, tai oratorių sąrašą galima sudaryti $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ būdais.

3 pavyzdys. Technikumo moksleivių grupę turi egzaminuoti dviejų dėstytojų komisija. Keliais būdais gali būti sudaryta komisija, jeigu technikume yra penki matematikos dėstytojai?

Sprendimas. Pažymėję dėstytojus raidėmis A, B, C, D, E, galime surašyti visus galimus egzaminų komisijos variantus, būtent:

$$AB,\ AC,\ AD,\ AE,\ BC,$$
$$BD,\ BE,\ CD,\ CE,\ DE.$$

Matome, kad iš viso yra dešimt variantų.

Pastaba. Žinoma, toks 3 pavyzdžio sprendimas nekelia pasitenkinimo. Juk jeigu dėstytojai būtų ne penki, bet, pavyzdžiui, keturiolika ir komisiją sudarytų ne du, bet, pavyzdžiui, septyni žmonės, tai šitoks bandymas gauti rezultatą būtų nesėkmingas, nes tuo atveju galima sudaryti (vėliau tai įrodysime) daugiau kaip tris tūkstančius įvairių egzaminų komisijų. Prieš apibrėždami naujas sąvokas ir išvesdami bendrąsias formules, kuriomis remdamiesi galėsime išspręsti bet kokius panašius uždavinius, išaiškinsime, kas yra bendro 1–3 pavyzdžiuose, ar yra tarp jų esminių skirtumų. Pirmiausia pastebime, kad visuose trijuose uždaviniuose nagrinėjama konkreti baigtinė elementų aibė ir reikia rasti jos poaibių, tenkinančių kai kurias sąlygas, skaičių. Pirmajame pavyzdyje buvo nagrinėjama visų grupės moksleivių aibė, t.y. aibė iš 20 elementų, ir reikėjo rasti visų skirtingų tos aibės poaibių iš dviejų elementų (dviejų moksleivių, išrinktų sekretoriumi ir proforgu) skaičių. Antrajame pavyzdyje buvo kalbama apie visų oratorių aibę iš keturių elementų ir reikėjo rasti skaičių visų tos aibės poaibių iš keturių elementų, besiskiriančių vienas nuo kito elementų išdėstymo tvarka. Trečiajame pavyzdyje iš visų matematikos dėstytojų aibės, kurią sudarė penki elementai, buvo sudaromi skirtingi poaibiai (komisijos) iš dviejų elementų ir reikėjo rasti jų skaičių.

Atidžiai išnagrinėję 1–3 pavyzdžius, be nurodytų panašumų pastebėsime ir skirtumų. Būtent, 1, 2 ir 3 pavyzdžiuose nevienodai reikia suprasti žodžius „skirtingi poaibiai“. Trečiajame pavyzdyje skirtingi yra poaibiai, kurie skiriasi bent vienu elementu, o į elementų tvarką nekreipiama dėmesio. Aišku, komisija, kurią sudaro dėstytojai Ivanovas ir Petrovas, niekuo nesiskiria nuo komisijos, kurią sudaro Petrovas ir Ivanovas. Pirmajame pavyzdyje priešingai – poaibiai yra skirtingi, nors jie skiriasi tik elementų tvarka. Ivanovo išrinkimas sekretoriumi, Petrovo – proforgu ir Petrovo išrinkimas sekretoriumi, o Ivanovo – proforgu yra du skirtingi išrinkimo būdai. Antrajame pavyzdyje apskritai buvo nagrinėjami tik tokie visų oratorių poaibiai, kurie skyrėsi vienas nuo kito elementų tvarka.

Kombinatorikos uždaviniuose visada reikia rasti skaičių duotosios aibės poaibių, tenkinančių tam tikras sąlygas. Tačiau vienuose uždaviniuose poaibiai, kurie skiriasi tik juose nustatyta elementų tvarka, laikomi skirtingais, kituose uždaviniuose elementų tvarka nėra svarbi, ir poaibiai, kurie skiriasi tik tvarka, nelaikomi skirtingais. Tai labai svarbu, mokantis kombinatoriką ir tikimybių teoriją.

2. Gretiniai ir kėliniai. Apibrėžimas. Sakykime, duota aibė, sudaryta iš n elementų. Kiekvienas sutvarkytas jos poaibis iš k elementų vadinamas *gretiniu iš n elementų po k elementų.*

Iš apibrėžimo išplaukia, kad $n \geqslant k \geqslant 0$ ir gretiniai iš n elementų po k elementų yra visi poaibiai, sudaryti iš k elementų; jie gali skirtis elementų sandara arba jų išdėstymo tvarka. Pažymėsime, kad gretinys iš n elementų po 0 elementų yra aibės, sudarytos iš n elementų, poaibis, neturintis elementų, t.y. tuščioji aibė.

Kombinatorikos uždaviniuose būtina suskaičiuoti visus gretinius iš n elementų po k elementų. Tas skaičius žymimas simboliu A_n^k (skaitoma:

„gretinių skaičius iš n po k“ arba „a iš n po k“)*. Dabar aišku, kad pirmajame ankstesniojo skirsnio pavyzdyje reikėjo rasti gretinių iš 20 elementų po 2 elementus skaičių. Remiantis to uždavinio sprendimu, $A_{20}^2=20\cdot 19=380$. Akivaizdu, kad $A_n^0=1$, nes yra tik vienas aibės, sudarytos iš n elementų, poaibis, neturintis elementų (tuščioji aibė).

Bendruoju atveju gretinių iš n elementų po k elementų skaičių rasime, remdamiesi šia teorema.

1 teorema. *Gretinių iš n elementų po k elementų skaičius yra lygus sandaugai k iš eilės einančių natūrinių skaičių nuo n iki $n-k+1$ imtinai, t.y.*

$$A_n^k=n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1),\quad k>0. \qquad (1)$$

Įrodymas. Gretinių skaičius iš n elementų po k elementų yra lygus visų n elementų aibės sutvarkytų poaibių, sudarytų iš k elementų, skaičiui. Akivaizdu, kad pirmąjį poaibio elementą galima išrinkti n būdų, antrąjį poaibio elementą galima išrinkti jau tik $n-1$ būdų, nes antruoju elementu galima imti bet kurį aibės elementą, išskyrus išrinktąjį pirmuoju. Kiekvienas pirmojo elemento išrinkimo būdas gali būti suderintas su kiekvienu antrojo elemento išrinkimo būdu. Taigi yra $n(n-1)$ pirmųjų dviejų elementų išrinkimo būdų, sudarant sutvarkytą poaibį iš k elementų. Išrinkus pirmuosius du elementus, trečiąjį galima išrinkti $n-2$ būdais, ir vėl kiekvienas tas būdas gali būti suderintas su kiekvienu pirmųjų dviejų elementų išrinkimo būdu, t.y. pirmuosius tris elementus galima išrinkti $n(n-1)\times$ $\times(n-2)$ būdais. Poaibio iš k elementų paskutinysis k-asis elementas gali būti išrinktas $n-k+1$ būdų, nes, prieš pradedant rinkti k-ąjį elementą, jau būna išrinkta $k-1$ elementų, taigi likę $n-(k-1)$, t.y. $n-k+1$ elementų. Vadinasi, (1) formulė įrodyta. Teoremos įrodymas yra 1 skirsnio 1 pavyzdžio sprendimo apibendrinimas.

(1) formulę patogiau užrašyti kitaip. Sandaugą $n(n-1)(n-2)\ldots\times$ $\times 3\cdot 2\cdot 1$, t.y. visų natūrinių skaičių nuo n iki vieneto sandaugą žymėsime simboliu $n!$ (skaitoma: „en faktorialas“). Vartodami tą simbolį, galime, pavyzdžiui, rašyti

$$1!=1$$

$$2!=2\cdot 1=2$$

$$3!=3\cdot 2\cdot 1=6$$

$$4!=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$$

$$5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120.$$

Sandaugą, esančią (1) formulės dešinėje pusėje, padauginę ir padalįję iš $(n-k)!$, gausime

$$A_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$$

arba

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}\,. \qquad (2)$$

* A yra pirmoji raidė prancūziško žodžio *arrangement*, kuris reiškia išdėstymą, sutvarkymą.

(1) formulę įrodėme, kai $k>0$, o (2) formulė yra teisinga net ir tuo atveju, kai $k=0$, nes tuomet

$$A_n^0=\frac{n!}{(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=1.$$

(1) formulę įrodėme, laikydami $n \neq 0$, t.y. duotoji aibė turi bent vieną elementą. Jeigu $n=0$, tai duotoji aibė yra tuščia. Kadangi tuščioji aibė turi tik vieną poaibį (save pačią), tai $A_0^0=1$. Jeigu apibrėšime $0!=1$, tai (2) formulė bus teisinga ir tuo atveju, kai $n=0$. Iš tikrųjų

$$A_0^0=\frac{0!}{0!}=1.$$

1 pavyzdys. Moksleivių grupė mokosi 7 disciplinas. Keliais skirtingais būdais gali būti sudarytas pirmadienio pamokų tvarkaraštis, jeigu tą dieną turi būti 4 skirtingos pamokos?

Sprendimas. Ieškomasis skaičius yra lygus gretinių iš 7 elementų po 4 skaičiui, t.y. A_7^4. Pagal (1) formulę, paėmę $n=7$, $k=4$, gausime $A_7^4=$ $=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$.

Apibrėžimas. Gretiniai iš n elementų po n elementų vadinami *kėliniais iš n elementų.*

Remiantis apibrėžimu, kėliniai yra atskiras gretinių atvejis. Kadangi kiekviename kėlinyje yra visi aibės n elementai, tai skirtingi kėliniai skiriasi tik elementų tvarka. Kėlinių iš n elementų skaičius (jį žymėsime P_n)* yra lygus visų sutvarkytų aibės iš n elementų poaibių iš n elementų skaičiui. Visų kėlinių iš 4 elementų skaičių (oratorių sąrašo sudarymo visų galimų būdų skaičių) radome 1 skirsnio 4 pavyzdyje. Tas skaičius lygus 24, taigi $P_4=24$.

Bendruoju atveju kėlinių iš n elementų skaičius $P_n=A_n^n$, taigi jį galima rasti pagal (1) arba (2) formules, paėmus $k=n$.

Iš tikrųjų, pagal (2) formulę

$$P_n=A_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!.$$

Remiantis (1) formule,

$$P_n=A_n^n=n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-n+1)=n!.$$

Taigi įrodėme šitokią teoremą.

2 teorema. *Kėlinių iš n elementų skaičius lygus n!*

2 pavyzdys. Kiek šešiaženklių skaičių, kurie būtų penkių kartotiniai, galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, 5, 6, jeigu skaičiaus skaitmenys negali pasikartoti?

Sprendimas. Skaitmuo 5 turi būti paskutinėje vietoje, o kiti penki skaitmenys gali būti surašyti kitose penkiose vietose bet kokia tvarka. Taigi šešiaženklių skaičių, kurie yra penkių kartotiniai, skaičius lygus kėlinių iš penkių elementų skaičiui, t.y. $5!=5\cdot4\cdot3\cdot2=120$.

* P yra pirmoji raidė prancūziško žodžio *permutation* – perstata.

1. Apskaičiuokite

a) $\frac{P_6 - P_5}{5!}$; b) $\frac{20!}{5!\,16!}$; c) $\frac{A_{20}^{6} + A_{20}^{5}}{A_{20}^{4}}$;

d) $\frac{P_{k+1}}{A_{k-1}^{n-1} P_{k-n}}$ $(k \geqslant n)$; e) $\frac{A_n^k (n-k)!}{(n-1)!}$ $(k \leqslant n)$.

2. Raskite n, kai

a) $A_n^5 = 18 A_{n-2}^4$; b) $A_n^4 P_{n-4} = 42 P_{n-2}$;

c) $P_{n+2} = 132\, A_n^k P_{n-k}$; d) $(n+5)! = 240\,(n-k)!\, A_{n+3}^{k+3}$.

3. Raskite funkcijos

$$f(x) = A_{7-x}^{x-3}$$

apibrėžimo sritį ir jos reikšmių aibę.

4. Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4, jeigu vieno skaičiaus skaitmenys negali pasikartoti?

5. Kiek skirtingų dviženklių skaičių galima sudaryti iš skaitmenų 1, 2, 3, 4?

6. Iš skaitmenų 0, 1, 2, 3 taip sudaryti visi galimi keturženkliai skaičiai, kad nė viename nėra pasikartojančių skaitmenų. Kiek yra tokių skaičių? Kiek tarp jų lyginių?

7. Kiek skirtingų kėlinių galima sudaryti iš šių žodžių raidžių: a) zebras, b) avinas, c) vandenilis, d) abrakadabra?

8. Keliais būdais galima sudaryti pirmadienio pamokų tvarkaraštį, jeigu tą dieną turi būti penkios pamokos: algebros, geometrijos, istorijos, geografijos ir literatūros; be to, algebros ir geometrijos pamokos negali būti viena po kitos?

9. Keliais būdais galima išdėstyti vienoje eilėje 5 baltus ir 4 juodus rutulius, kad juodieji rutuliai nebūtų greta? Vienos spalvos rutuliai nesiskiria vienas nuo kito.

10. Laukinių žvėrių dresiruotojas turi išvesti į cirko areną vieną po kito penkis liūtus ir keturis tigrus. Keliais būdais jis gali tai padaryti, jeigu du tigrai negali eiti vienas po kito?

3. Deriniai. Apibrėžimas. Sakykime, duota aibė iš n elementų. Kiekvieną jos poaibį iš k elementų vadinsime *deriniu iš n elementų po k elementų.*

Taigi deriniai iš n elementų po k elementų yra visi aibės iš n elementų poaibiai po k elementų. Du poaibiai laikomi skirtingais, jeigu jie turi bent po vieną skirtingą elementą. Poaibiai, kurie skiriasi tik elementų tvarka, nėra skirtingi.

Visų derinių iš n elementų po k elementų skaičių žymėsime simboliu C_n^k (skaitoma: „derinių iš n po k skaičius“ arba „cė iš n po k“)*. Derinių iš 5 elementų po 2 elementus skaičių radome 1 skirsnio 3 pavyzdyje: $C_5^2 = 10$

Bendruoju atveju derinių iš n elementų po k elementų skaičių randame. pagal formulę

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}. \qquad (1)$$

Įrodysime tą formulę. Rasime sąryšį tarp C_n^k ir A_n^k. Skaičių A_n^k, t.y. visų sutvarkytų poaibių iš k elementų skaičių, galime rasti šitaip. Iš pradžių

* C yra pirmoji raidė prancūziško žodžio *combinaison* — derinys. Pastebėsime, kad kartais vietoj C_n^k rašoma $\binom{n}{k}$.

sudarome visus galimus nesutvarkytus poaibius iš k elementų; jų iš viso bus C_n^k. Po to iš kiekvieno gautojo poaibio, perkėlę jo elementus, gausime visus sutvarkytus poaibius. Akivaizdu, kad jų bus $k!$ kartų daugiau, nes kiekvieną aibę iš k elementų galime sutvarkyti $k!$ būdų. Kitaip tariant, sutvarkytų poaibių iš k elementų yra $k!$ kartų daugiau, negu nesutvarkytų, t.y. $A_n^k = k!\, C_n^k$, taigi $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. Kadangi $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, tai $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$.
Dabar galime rasti, kelias egzaminų komisijas iš 7 žmonių galima sudaryti, jeigu iš viso egzaminatorių yra 14 (žr. pastabą po 1 skirsnio 3 uždavinio):

$$C_{14}^7 = \frac{14!}{7!\,7!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 3432.$$

(1) formulę galima užrašyti patogesniu skaičiavimams pavidalu. Suprastinę trupmenos skaitiklį ir vardiklį iš $(n-k)!$, gausime

$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-k+1)}{k!}. \tag{2}$$

Tą rezultatą galime suformuluoti šitaip.

3 teorema. *Derinių iš n elementų po k elementų skaičius yra lygus visų natūrinių skaičių nuo n iki $n-k+1$ imtinai sandaugai, padalytai iš $k!$*

1 pavyzdys. Kiek rungtynių bus sužaista futbolo čempionate, kuriame dalyvaus 16 komandų, jeigu bet kurios dvi komandos tarpusavyje žais vieną kartą?

Sprendimas. Rungtynių skaičius bus lygus visų aibės iš 16 elementų poaibių po 2 elementus skaičiui, t.y. C_{16}^2. Pagal (2) formulę randame

$$C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120,$$

t.y. iš viso bus sužaista 120 rungtynių.

Skaičiai C_n^k pasižymi įdomiomis ir svarbiomis savybėmis; dvi iš jų įrodysime. Pirmoji savybė apibrėžiama lygybe

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{3}$$

kurią nesunkiai įrodome, remdamiesi (1) formule:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{\big(n-(n-k)\big)!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = C_n^k.$$

Remiantis ta savybe, paprasčiau randami skaičiai C_n^k, kai $k > \frac{n}{2}$; pavyzdžiui,

$$C_{15}^{12} = C_{15}^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455.$$

Antrąją savybę

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k \quad (k < n) \tag{4}$$

taip pat nesunku įrodyti, remiantis (1) formule:

$$C_n^{k+1}+C_n^k=\frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}+\frac{n!}{(n-k)!\,k!}=$$

$$=\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k)!}\left(\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}+\frac{(k+1)!}{k!}\right)=$$

$$=\frac{n!}{(k+1)!\,\big(n+1-(k+1)\big)!}\left(\frac{n-k}{1}+\frac{k+1}{1}\right)=$$

$$=\frac{(n+1)!}{\big(n+1-(k+1)\big)!\,(k+1)!}=C_{n+1}^{k+1}.$$

Remiantis (4) formule, skaičius C_n^k galima rasti nuosekliai. Iš tikrųjų, paėmę $n=1$, $k=1$, gausime $C_2^1=C_1^1+C_1^0=2$; po to, paėmę $n=2$, $k=0$ arba $k=1$, gausime

$$C_3^1=C_2^1+C_2^0=2+1=3,$$

$$C_3^2=C_2^2+C_2^1=1+2=3.$$

Jeigu $n=3$, tai, paėmę $k=0, 1, 2$, atitinkamai gausime

$$C_4^1=C_3^1+C_3^0=3+1=4,$$

$$C_4^2=C_3^2+C_3^1=3+3=6,$$

$$C_4^3=C_3^3+C_3^2=1+3=4$$

ir t.t.

Jeigu skaičius C_n^k surašysime į trikampę lentelę

$$\begin{matrix} & & & C_0^0 & & & \\ & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\ & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\ C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3, \end{matrix}$$

tai kiekvienos eilutės pradžioje ir gale bus vienetai, nes $C_n^0=C_n^n=1$. Kitas vietas nuosekliai užpildytume, remdamiesi (4) formule, iš kurios išplaukia, kad bet kurios eilutės bet kurioje vietoje (išskyrus kraštines) yra skaičius, lygus sumai dviejų skaičių, kurie yra pirmesnėje eilutėje virš jo. Ta lentelė vadinama *Paskalio trikampiu.* Išrašysime pirmąsias septynias Paskalio trikampio eilutes:

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1.

Tą lentelę galima pratęsti, užrašius kitas eilutes pagal dėsnį, apibrėžtą (4) formule.

11. Apskaičiuokite

$$\frac{P_6(C_7^5+C_7^4)}{A_{10}^7}.$$

12. Raskite n, kai

a) $12C_{n+3}^{n-1}=55A_{n+1}^2$; b) $12C_n^1+C_{n+4}^2=126$;

c) $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^n=15(n+2)$; d) $\frac{1}{C_4^n}=\frac{1}{C_5^n}+\frac{1}{C_6^n}$.

13. Raskite funkcijos

$$f(x)=C_{x+1}^{2x-8}$$

apibrėžimo sritį ir jos reikšmių aibę.

14. Išspręskite nelygybę

a) $C_{10}^{x-1}>2C_{10}^x$; b) $8C_{105}^x<3C_{105}^{x+1}$.

15. Penkiems darbuotojams skiriami trys kelialapiai. Keliais būdais juos galima paskirstyti, jeigu

a) visi kelialapiai skirtingi;

b) visi kelialapiai vienodi?

16. Grupėje yra 30 studentų. Keliais būdais galima paskirti du žmones budėti, jeigu

a) vienas turi būti vyresniuoju;

b) vyresniojo nėra?

17. Klasėje yra 38 vietos. Keliais būdais galima susodinti 35 moksleivius?

18. Futbolo pirmenybėse buvo sužaistos 153 rungtynės. Bet kurios dvi komandos tarpusavyje žaidė vieną kartą. Kiek komandų dalyvavo pirmenybėse?

19. Šachmatų turnyro dalyviai tarpusavyje žaidžia vieną kartą. Du šachmatininkai susirgo, kiekvienas sužaidęs po tris partijas. Kiek šachmatininkų pradėjo turnyrą, jeigu iš viso buvo sužaistos 84 partijos?

20. Kiek įstrižainių turi iškilusis dešimtkampis?

21. Jokios trys iškiliojo dešimtkampio įstrižainės nesikerta viename taške. Raskite įstrižainių susikirtimo taškų skaičių.

22. Būryje yra 3 seržantai ir 30 kareivių. Keliais būdais galima išrinkti sargybon vieną seržantą ir tris kareivius?

23. Morzės abėcėlės raidės yra „taškų“ ir „brūkšnių“ rinkiniai. Kiek raidžių gali būti Morzės abėcėlėje, jeigu

a) raidės negali sudaryti daugiau kaip keturi ženklai,

b) raidės negali sudaryti daugiau kaip penki ženklai?

24. Ledo ritulio komandoje yra 2 vartininkai, 7 gynėjai ir 10 puolėjų. Keliais būdais treneris gali sudaryti pirmąjį šešetuką iš vartininko, dviejų gynėjų ir trijų puolėjų?

25. Kiek yra šešiaženklių skaičių, kurių visi skaitmenys nelyginiai (1, 3, 5, 7, 9)?

26. Seifas užrakinamas spyna, kurią sudaro penki diskai su skaitmenimis 0, 1, 2, ..., 9. Spyna atrakinama, surinkus vieną tam tikrą skaitmenų rinkinį. Ar užteks 10 dienų, norint atrakinti seifą, jeigu „darbo diena“ trunka 13 valandų, o vieną skaitmenų rinkinį galima surinkti per 5 sekundes?

27. Automobilių numeriai yra iš trijų raidžių (iš viso vartojama 30 raidžių) ir keturių skaitmenų (vartojami visi 10 skaitmenų). Kiek automobilių galima taip sunumeruoti, kad nebūtų dviejų, turinčių tą patį numerį?

§ 27. NIUTONO FORMULĖ

Skaičiai, esantys antrojoje ir trečiojoje Paskalio trikampio eilutėse, gaunami, dvinarį (binomą) $a+b$ pakėlus kvadratu ir kubu. Iš tikrųjų, gerai žinomas formules

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

galime užrašyti šitaip:

$$(a+b)^2=C_2^0\,a^2+C_2^1\,ab+C_2^2\,b^2,$$

$$(a+b)^3=C_3^0\,a^3+C_3^1\,a^2\,b+C_3^2\,ab^2+C_3^3\,b^3.$$

Kyla natūrali hipotezė: ar analogiškos formulės bus teisingos ir ketvirtajam, penktajam ir apskritai bet kuriam natūriniam binomo laipsniui?

Išsiaiškinsime, ar analogiška formulė yra teisinga ketvirtajam laipsniui. Tuo tikslu abi $(a+b)^3$ formulės dalis padauginę iš $a+b$, gausime

$$(a+b)^4=(C_3^0\,a^3+C_3^1\,a^2\,b+C_3^2\,ab^2+C_3^3\,b^3)\,(a+b)=$$

$$=C_3^0\,a^4+C_3^1\,a^3\,b+C_3^2\,a^2\,b^2+C_3^3\,ab^3+C_3^0\,a^3\,b+C_3^1\,a^2\,b^2+C_3^2\,ab^3+C_3^3\,b^4=$$

$$=C_3^0\,a^4+(C_3^1+C_3^0)\,a^3\,b+(C_3^2+C_3^1)\,a^2\,b^2+(C_3^3+C_3^2)\,ab^3+C_3^3\,b^4.$$

Kadangi

$$C_3^0=C_4^0,\quad C_3^1+C_3^0=C_4^1,\quad C_3^2+C_3^1=C_4^2,$$

$$C_3^3+C_3^2=C_4^3,\quad C_3^3=C_4^4,$$

tai yra teisinga formulė

$$(a+b)^4=C_4^0\,a^4+C_4^1\,a^3\,b+C_4^2\,a^2\,b^2+C_4^3\,ab^3+C_4^4\,b^4.$$

Vadinasi, remdamiesi trečiojo laipsnio binomo formule, gavome analogišką ketvirtojo laipsnio binomo formulę. Tai patvirtina hipotezę ir skatina įrodyti ją matematinės indukcijos metodu.

Teorema. *Su bet kuriais skaičiais a ir b ir bet kuriuo natūriniu skaičiumi n teisinga formulė*

$$(a+b)^n=C_n^0\,a^n+C_n^1\,a^{n-1}\,b+\ldots+C_n^k\,a^{n-k}\,b^k+\ldots+C_n^n\,b^n. \qquad (1)$$

Pavartoję sumos ženklą, Niutono formulę galime užrašyti trumpiau:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,a^{n-k}\,b^k. \qquad (2)$$

Įrodymas. Kai $n=1$, Niutono formulė yra

$$(a+b)^1=C_1^0\,a+C_1^1\,b.$$

Kadangi $C_1^0=C_1^1=1$, tai akivaizdu, kad ji teisinga.

Sakykime, formulė yra teisinga, kai $n=m$, t.y.

$$(a+b)^m=\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k .$$

Tada

$$(a+b)^{m+1}=(a+b)\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k =$$

$$=\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k+\sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1}=$$

$$=C_m^0 a^{m+1}+\sum_{k=1}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k+\sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} a^{m+1-k} b^k+C_m^m b^{m+1}=$$

$$=C_m^0 a^{m+1}+\sum_{k=1}^{m} (C_m^k+C_m^{k-1}) a^{m+1-k} b^k+C_m^m b^{m+1}.$$

Kadangi

$$C_m^0=C_{m+1}^0,\quad C_m^k+C_m^{k-1}=C_{m+1}^k,\quad C_m^m=C_{m+1}^{m+1},$$

tai

$$(a+b)^{m+1}=\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k.$$

Vadinasi, jeigu (1) formulė yra teisinga, kai $n=m$, tai ji teisinga ir kai $n=m+1$. Kadangi ji yra teisinga, kai $n=1$, tai, remiantis matematinės indukcijos principu, ji teisinga su visomis natūrinėmis n reikšmėmis.

(1) formulė pavadinta žymaus anglų fiziko ir matematiko I. Niutono vardu. Dešinioji jos dalis vadinama binomo natūrinio laipsnio dėstiniu. Koeficientai C_n^k vadinami *binominiais koeficientais.*

Išvardysime kai kurias būdingas Niutono formulės ypatybes.

a) Dešinėje Niutono formulės dalyje yra $n+1$ dėmuo.

b) Kiekvienas dėmuo yra $C_n^k a^{n-k} b^k$ pavidalo.

Dėmenį $C_n^k a^{n-k} b^k$, esantį $(k+1)$-oje vietoje, patogu laikyti k-uoju dėstinio nariu ir žymėti simboliu T_k. Tada $T_0=C_n^0 a^n$ yra nulinis dėstinio narys, $T_1=C_n^1 a^{n-1} b$ – pirmasis, $T_n=C_n^n b^n$ – n-asis dėstinio narys.

c) Kiekvieno sekančio dėstinio nario a laipsnio rodiklis yra vienetu mažesnis, negu pirmesniojo, o b laipsnio rodiklis – vienetu didesnis. Kiekvieno dėstinio nario a ir b laipsnių rodiklių suma lygi n.

d) Dėstinio binominiai koeficientai yra Paskalio trikampio $(n+1)$-osios eilutės skaičiai. Dėstinio koeficientai, vienodai nutolę nuo nulinio ir n-ojo narių, yra lygūs, nes

$$C_n^k=C_n^{n-k}.$$

Niutono formulę galima užrašyti ir šitaip:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k \qquad (3)$$

arba be sumos ženklo

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+$$

$$+\dots+\frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\dots+b^n. \qquad (3')$$

Šiose formulėse vietoj binominių koeficientų C_n^k surašytos jų išraiškos, remiantis 26 paragrafo (4) formule.

1 pavyzdys. Dvinarį $(x+1)$ pakelsime septintuoju laipsniu. (2) formulėje paėmę $a=x$, $b=1$, $n=7$, gausime

$$(x+1)^7=\sum_{k=0}^{7}C_7^k x^{7-k}=$$

$$=C_7^0x^7+C_7^1x^6+C_7^2x^5+C_7^3x^4+C_7^4x^3+C_7^5x^2+C_7^6x+C_7^7=$$

$$=x^7+7x^6+\frac{7\cdot6}{2}x^5+\frac{7\cdot6\cdot5}{2\cdot3}x^4+\frac{7\cdot6\cdot5}{2\cdot3}x^3+\frac{7\cdot6}{2}x^2+7x+1=$$

$$=x^7+7x^6+21x^5+35x^4+35x^3+21x^2+7x+1.$$

2 pavyzdys. Dvinarį $x-y$ pakelsime penktuoju laipsniu.

Remsimės (3) formule; joje imsime $a=x$, $b=-y$, $n=5$. Tada

$$(x-y)^5=\sum_{k=0}^{5}\frac{n(n-1)\ \dots\ (n-k+1)}{k!}x^{5-k}(-y)^k=$$

$$=x^5+5x^4(-y)+\frac{5\cdot4}{2}x^3(-y)^2+\frac{5\cdot4}{2}x^2(-y)^3+5x(-y)^4+(-y)^5=$$

$$=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5.$$

3 pavyzdys. Apskaičiuosime $(1+i)^6$.

Paėmę (3) formulėje $a=1$, $b=i$, $n=6$, gausime

$$(1+i)^6=1+6i+\frac{6\cdot5}{2}i^2+\frac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot3}i^3+\frac{6\cdot5}{2}i^4+$$

$$+6i^5+i^6=1+6i-15-20i+15+6i-1=-8i.$$

4 pavyzdys. Rasime binomo laipsnio $\left(\frac{1}{x}+x\right)^{12}$ dėstinio devintąjį narį:

$$T_9=C_{12}^9\left(\frac{1}{x}\right)^3x^9=C_{12}^3x^6=\frac{12\cdot11\cdot10}{2\cdot3}x^6=220\,x^6.$$

5 pavyzdys. Rasime binomo laipsnio $\left(\sqrt[3]{t}-\frac{1}{t}\right)^{20}$ dėstinio narį, kuriame nėra t.

Imkime k-ąjį dėstinio narį:

$$T_k = C_{20}^k (\sqrt[3]{t})^{20-k} \left(-\frac{1}{t}\right)^k = (-1)^k C_{20}^k t^{\frac{20-k}{3}-k}.$$

Narys T_k nepriklauso nuo t tada ir tik tada, kai $\frac{20-k}{3}-k=0$, t.y. $k=5$.

Taigi t nėra penktajame dėstinio naryje.

6 pavyzdys. Rasime visų binominių koeficientų sumą.

Įrašę (2) formulėje $a=1$, $b=1$, turėsime

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

Vadinasi,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Pastaba. Paaiškinsime tos lygybės prasmę. Kadangi C_n^k yra skaičius visų aibės iš n elementų poaibių, turinčių po k elementų, tai akivaizdu, kad suma

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$$

yra visų aibės iš n elementų poaibių skaičius. Taigi visų aibės iš n elementų poaibių po k elementų skaičius lygus 2^n.

7 pavyzdys. Rasime didžiausią daugianario

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$$

koeficientą.

Pažymėkime a_k daugianario koeficientą prie x^k. Remdamiesi (2) formule, daugianarį taip išdėstysime, kad x laipsnių rodikliai didėtų:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k x^k = \sum_{k=0}^{10} a_k x^k.$$

Ieškodami didžiausio koeficiento a_k, spręsime nelygybę $a_{k-1} \leqslant a_k$, t.y.

$$C_{10}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \leqslant C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

Abi nelygybės puses padaliję iš $\frac{2^{k-1}}{3^{10}}$, gausime

$$C_{10}^{k-1} \leqslant 2C_{10}^k,$$

arba

$$\frac{10!}{(k-1)!\,(10-k+1)!} \leqslant \frac{2 \cdot 10!}{k!\,(10-k)!}.$$

Suprastinę gausime

$$\frac{1}{10-k+1} \leqslant \frac{2}{k}, \quad k \leqslant 20-2k+2, \quad k \leqslant \frac{22}{3}.$$

Taigi įrodėme, kad

$$a_0 < a_1 < \ldots < a_7.$$

Akivaizdu, kad, kai $k > \frac{22}{3}$, teisinga priešinga nelygybė $a_{k-1} > a_k$, t.y. daugianario koeficientai, pradedant septintuoju, mažėja.

Taigi koeficientas a_7 yra didžiausias iš visų vienuolikos duotojo daugianario koeficientų; jis lygus

$$C_{10}^7 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^7.$$

Pratimai

1. Parašykite Niutono formulę, kai binomo laipsnis:

a) $(x^2-y)^6$; b) $(3a^2-2b)^5$.

2. Raskite binomo laipsnio dėstinį:

a) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^7$; b) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^8$.

3. Raskite binomo laipsnio dėstinį ir suprastinkite gautąjį reiškinį:

a) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^5$; b) $(1+i\sqrt{3})^6$.

4. Raskite:

a) septintąjį dėstinio $(2x-3)^{10}$ narį;

b) ketvirtąjį dėstinio $\left(\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^9$ narį.

5. Raskite:

a) vidurinį dėstinio $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$ narį;

b) du vidurinius dėstinio $(\sqrt{a}-\sqrt[3]{b})^{13}$ narius.

6. Raskite dėstinio narį, nepriklausantį nuo x:

a) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$; b) $\left(\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$.

7. Raskite dėstinio narį, kuriame nebūtų z:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt[7]{z^2}}-2\sqrt{z}\right)^{11}$; b) $\left(z^{\frac{1}{3}}+z^{-\frac{1}{2}}\right)^{15}$.

8. Raskite laipsnio rodiklį n, jeigu binomo laipsnio

$$\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{-1}\right)^{n}$$

dėstinio ketvirtasis narys nepriklauso nuo a.

9. Raskite dėstinio narį, kuriame nebūtų x, jeigu binomo laipsnio

$$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^{n}$$

dėstinio binominių koeficientų suma lygi 256.

10. Raskite dėstinio racionaliuosius narius:

a) $(\sqrt[6]{3}+\sqrt[5]{2})^{11}$; b) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^{8}$.

11. Raskite didžiausią daugianario narį:

a) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^{100}$; b) $\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{10}x\right)^{12}$;

c) $\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}x\right)^{105}$; d) $(\sqrt{5}+\sqrt{2}\,x)^{20}$.

12. Raskite daugianario koeficientą:

a) $(1+x^2-x^3)^9$ prie x^8;

b) $(1+3x+2x^3)^{10}$ prie x^4.

13. Raskite sumas:

a) $\sum\limits_{k=2}^{n-2} C_n^k$; b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$;

c) $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2n}^{2k}$; d) $\sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n}^{2k-1}$.

14. Raskite daugianario koeficientų sumą:

a) $(2x-1)^{100}$; b) $(x^3-x-1)^{99}$.

VII SKYRIUS

Tikimybių teorijos elementai

§ 28. ATSITIKTINIAI ĮVYKIAI. ĮVYKIO TIKIMYBĖ

1. Atsitiktiniai įvykiai ir jų veiksmai. *Atsitiktiniu įvykiu* vadiname kiekvieną įvykį, kuris, atliekant tam tikrą bandymą, gali įvykti, bet gali ir neįvykti. Taigi atsitiktinis įvykis yra susijęs su tam tikru bandymu.

Pavyzdžiui, atliekamas bandymas – mėtoma moneta. Atsitiktiniu įvykiu, susijusiu su tuo bandymu, bus „herbo atvirtimas": vienais atvejais moneta nukris taip, kad viršuje bus herbas, t.y. įvyks įvykis „herbo atvirtimas", kitais – moneta nukris taip, kad herbas bus apačioje, vadinasi, įvykis neįvyks. Atsitiktiniai įvykiai yra „šešiukės atvirtimas", metus lošimo kauliuką, elektrinės lempos perdegimas per tam tikrą laikotarpį, ląstelės žuvimas, veikiant radioaktyviems spinduliams. Visais tais atvejais iš anksto negalima pasakyti, įvyks ar neįvyks atitinkamas įvykis, nes rezultatas priklauso nuo daugelio veiksnių, kurių įtakos negalima nustatyti. Joks mokslas, taigi ir matematika, negali pasakyti, koks bus vieno kokio nors panašaus eksperimento rezultatas. Atsitiktinį įvykį galima nagrinėti tik tada, kai bent iš principo bandymą galima pakartoti daug kartų ir kiekvieną kartą užfiksuoti, ar nagrinėjamasis įvykis įvyko (ar neįvyko).

Jeigu ta sąlyga yra išpildyta, tai galima apibrėžti atsitiktinio įvykio *dažnio* sąvoką. Jeigu, bandymą pakartojus n kartų, įvykis įvyko k kartų, tai santykį $\frac{k}{n}$ vadinsime atsitiktinio įvykio dažniu.

1 pavyzdys. Prancūzų tyrinėtojas Biufonas, nagrinėdamas didžiųjų skaičių dėsnį, metė monetą 4040 kartų. Herbas atvirto 2048 kartus. Taigi įvykio „herbo atvirtimas" dažnis yra

$$\frac{2048}{4040} \approx 0{,}507 \approx 0{,}5.$$

2 pavyzdys. Pagal Mendelio teoriją, sukryžminus geltonąjį žirnį su geltonuoju, apytiksliai vieną kartą iš keturių gaunamas žaliasis žirnis. Tikrinant tą teoriją, geltonieji žirniai buvo kryžminami 34 153 kartus. 8506 kartus buvo gautas žaliasis žirnis. Įvykio „žaliojo žirnio atsiradimas" dažnis šiame eksperimente yra

$$\frac{8506}{34153} \approx 0{,}252 \approx 0{,}25.$$

Eksperimentai, kuriuos minėjome 1 ir 2 pavyzdžiuose, buvo kartojami. Kiekvieną kartą, kai bandymų skaičius būdavo pakankamai didelis, įvykio „herbo atvirtimas“ dažnis būdavo artimas $\frac{1}{2}$, o įvykio „žaliojo žirnio atsiradimas“ dažnis – artimas $\frac{1}{4}$. Toks reiškinys vadinamas *įvykio dažnio statistiniu stabilumu.* Remiantis eksperimentais, statistinio stabilumo savybė yra būdinga daugeliui praktikoje pasitaikančių atsitiktinių įvykių. Įvykius, pasižyminčius dažnio statistiniu stabilumu, nagrinėja speciali matematinė disciplina – tikimybių teorija.

Tikimybių teorijos pradžia buvo Paskalio, Ferma ir Hiuigenso darbai XVII a.; be to, jos raidos pradinė stadija susijusi su azartiniais lošimais. Reikia pastebėti, kad ir šiuo metu, nagrinėjant bei taikant tikimybių teoriją, azartiniai lošimai gana plačiai „naudojami“, nes juose pasitaikantys atsitiktiniai įvykiai be dažnio statistinio stabilumo savybės turi ir kitų privalumų. Jie yra paprasti, jais remiantis galima tiksliai suformuluoti uždavinį, neužgriozdintą pašaliniais veiksniais, būdingais vienai ar kitai specialiajai žinių sričiai. Pagaliau gautus dėsnius galima patikrinti, pakartojus eksperimentą be galo daug kartų, nes būtent azartiniuose lošimuose tą patį bandymą galima pakartoti kiek norima kartų. Atsitiktiniai įvykiai, susiję su azartiniais lošimais, yra labai patogūs modeliai, nagrinėjant sudėtingesnius ir svarbesnius praktinius uždavinius.

Tikimybių teorija, atsiradusi analizuojant azartiniuose lošimuose pasitaikančias situacijas, duodant rekomendacijas kauliuko žaidėjams, virto mokslu, be kurio šiandien negali išsiversti nei fizika, nei astronomija, nei ekonomika, nei lingvistika. Be to, šiuo metu tikimybių teorija pagrįstas daugelio naujų mokslinių krypčių – matematinės statistikos, informacijos teorijos, masinio aptarnavimo teorijos vystymasis. Žymų vaidmenį, paverčiant tikimybių teoriją matematiniu mokslu, suvaidino J. Bernulis, A. Muavras, P. Laplasas, K. Gausas, S. Puasonas. Daug prisidėjo prie jos raidos rusų mokslininkai P. Čebyšovas, A. Markovas, A. Liapunovas; keletą svarbių rezultatų įvairiose tikimybių teorijos srityse yra gavęs tarybinis matematikas A. Kolmogorovas.

Atsitiktiniai įvykiai tikimybių teorijoje dažniausiai žymimi didžiosiomis lotynų abėcėlės raidėmis A, B, C ir t.t., kartais tos raidės rašomos su indeksais, pavyzdžiui, A_1, A_m. Būdvardis „atsitiktiniai“ trumpumo dėlei dažnai nerašomas ir sakoma tik „įvykiai“.

Įvykis, kuris, atlikus bandymą, visada įvyksta, vadinamas *būtinu įvykiu.*

Jeigu įvykis niekada negali įvykti atlikus bandymą, tai jį vadinsime *negalimu.*

Sakykime, urnoje yra tik balti rutuliai ir iš jos atsitiktinai traukiamas rutulys. Tada įvykis A (ištrauktas baltas rutulys) yra būtinas, o įvykis B (ištrauktas juodas rutulys) – negalimas. Būtinus įvykius žymėsime raide U, negalimus – raide V.

Įvykius A ir B vadinsime *lygiaverčiais* (*lygiais*), jeigu A įvyksta tada ir tik tada, kai įvyksta B. Lygiaverčius įvykius sujungsime lygybės ženklu, t.y. rašysime $A=B$. Pavyzdžiui, mėtant lošimo kauliuką, įvykis A (atvirto

šešiukė) ir įvykis B (atvirto sienelė, pažymėta didžiausiu galimu numeriu) yra lygiaverčiai.

Kiekvienam įvykiui A galima nagrinėti įvykį „įvykis A neįvyko". Jį vadinsime *priešingu* įvykiui A ir žymėsime $\bar{A}$. Būtinajam ir negalimam įvykiams priešingi yra $\bar{U}=V$, $\bar{V}=U$. Sakykime, šaulys šaudo į taikinį; įvykis A (į taikinį pataikė) ir įvykis B į taikinį nepataikė yra vienas kitam priešingi, t.y. $\bar{A}=B$, $\bar{B}=A$.

Apibrėšime įvykių sąjungos ir sankirtos sąvokas.

1 apibrėžimas. Įvykių A_1 ir A_2 *sąjunga* (*suma*) vadinsime įvykį A, kuris įvyksta, jeigu įvyksta bent vienas iš įvykių – A_1 arba A_2. Tuomet rašysime $A=A_1 \cup A_2$.

3 pavyzdys. Sakysime, iš kaladės atsitiktinai ištraukiama viena korta. Jeigu A_1 yra įvykis, kad ta korta – dama, o A_2 – įvykis, kad ta korta yra lapų, tai įvykis $A=A_1 \cup A_2$ reiškia, kad ištrauktoji korta yra arba dama, arba lapų.

2 apibrėžimas. Įvykių A_1 ir A_2 *sankirta* (*sandauga*) vadinsime įvykį A, kuris įvyksta tada ir tik tada, kai įvykiai A_1 ir A_2 įvyksta kartu. Tuomet rašome $A=A_1 \cap A_2$.

4 pavyzdys. Sakysime, A_1 ir A_2 yra 3 pavyzdyje aprašyti įvykiai. Jų sandauga $A=A_1 \cap A_2$ yra įvykis, kad iš kaladės ištraukta lapų dama.

Akivaizdu, jog įvykių jungimasis ir kirtimasis tenkina šiuos dėsnius:

$$A \cup B=B \cup A \quad \text{– jungimosi komutatyvumo,}$$
$$A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C \quad \text{– jungimosi asociatyvumo,}$$
$$A \cap B=B \cap A \quad \text{– kirtimosi komutatyvumo,}$$
$$A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C \quad \text{– kirtimosi asociatyvumo,}$$
$$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{– distributyvumo.}$$

3 apibrėžimas. Jeigu $A_1 \cap A_2=V$, tai įvykius A_1 ir A_2 vadinsime *nesutaikomais.*

Dviejų įvykių sąjungos ir sankirtos sąvokas galima apibendrinti bet kuriam baigtiniam įvykių skaičiui. Įvykis $A=A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ reiškia, kad įvyko bent vienas iš įvykių $A_1, A_2, \ldots, A_m$, o įvykis $A=A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m$ reiškia, kad visi įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_m$ įvyko kartu. Įvykius $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m>2)$ vadinsime *poromis nesutaikomais*, jeigu bet kurie du iš jų yra nesutaikomi.

5 pavyzdys. Sakysime, mėtomas lošimo kauliukas. Nagrinėsime įvykius: A_1 (atsiverčia lyginis akučių skaičius), A_2 (atsiverčia šešiukė), A_3 (atsiverčia akučių skaičius, didesnis kaip du). Tada $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ yra įvykis „atvirto viena iš sienelių, pažymėtų 2, 3, 4, 5, 6 akutėmis; $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ yra įvykis „atvirto šešios akutės".

6 pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Jeigu A_i yra įvykis „atvirto i akučių", tai $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6$ yra įvykis „atvirto viena iš šešių kauliuko sienelių", o $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6$ – įvykis „visos šešios sienelės atvirto kartu". Aišku,

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6=U,$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6=V.$$

4 apibrėžimas. Sakysime, kad įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sudaro *pilnąją įvykių aibę*, jeigu jų suma yra būtinas įvykis, t.y.

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = U.$$

Penktojo pavyzdžio įvykiai nesudaro pilnosios įvykių aibės, o 6 pavyzdžio įvykiai ją sudaro, be to, jie sudaro pilną poromis nesutaikomų įvykių aibę.

Pratimai

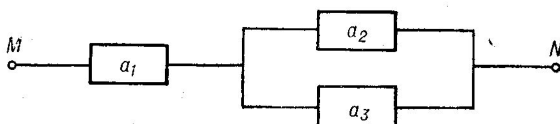
1. Į taikinį buvo šauta tris kartus ir A_i yra įvykis, kad i-uoju šūviu buvo pataikyta. Apibūdinkite įvykius:

a) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$,

b) $A_1 \cap A_2 \cap A_3$,

c) $(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3)$.

2. Elektrinė grandinė sujungta pagal schemą:



Sakykime, B yra įvykis „grandinėje MN srovės nėra“, o A_i — įvykis „elementas a_i sugedo“. Įvykius B ir $\bar{B}$ išreikškite įvykiais A_i $(i=1, 2, 3)$.

3. Į taikinį šauta du kartus. Ar įvykiai A (į taikinį pataikyta) ir B (bent vienas šūvis buvo nesėkmingas) sudaro pilnąją įvykių aibę? Ar įvykiai A ir B yra nesutaikomi?

4. Nurodykite tris įvykius, kurie nebūtų poromis nesutaikomi, bet sudarytų pilnąją įvykių aibę.

2. Bandymas vienodai galimais rezultatais. Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas. Sakykime, atliekant tam tikrą bandymą, gali įvykti įvykiai $U_1, U_2, \ldots, U_n$, sudarantys pilnąją poromis nesutaikomų įvykių aibę, ir kiekvienas iš įvykių $U_1, U_2, \ldots, U_n$ yra vienodai galimas, t.y. nėra objektyvių priežasčių laikyti, kad kuris nors yra galimas labiau, negu kitas. Tokį bandymą vadinsime *bandymu vienodai galimais rezultatais*, o pačius įvykius vadinsime vienodai galimais; sakysime, kad kiekvieno įvykio tikimybė lygi $\frac{1}{n}$ ir rašysime:

$$\mathbf{P}(U_1) = \frac{1}{n}, \ \mathbf{P}(U_2) = \frac{1}{n}, \ \ldots, \ \mathbf{P}(U_n) = \frac{1}{n}^*.$$

1 pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Sakykime, U_i yra įvykis „atvirs i akučių“. Jau žinome, kad įvykiai $U_1, U_2, \ldots, U_6$ sudaro pilnąją poromis nesutaikomų įvykių aibę. Kadangi kauliukas yra vienalytis ir

* Formulė $\mathbf{P}(U_1) = \frac{1}{n}$ skaitoma: „Įvykio U_1 tikimybė lygi $\frac{1}{n}$“. $\mathbf{P}$ yra pirmoji raidė angliško žodžio *probability* — tikimybė.

simetriškas, tai natūralu visus įvykius laikyti vienodai galimais. Taigi, atliekant tą bandymą, įvyksta vienodai galimi įvykiai $U_1, U_2, \ldots, U_6$ ir

$$\mathbf{P}(U_1)=\frac{1}{6},\ \mathbf{P}(U_2)=\frac{1}{6},\ \ldots,\ \mathbf{P}(U_6)=\frac{1}{6}.$$

Įvykius $U_1, U_2, \ldots, U_n$, sudarančius pilnąją poromis nesutaikomų ir vienodai galimų įvykių aibę, vadinsime *elementariaisiais.*

Sakykime, atliekamas bandymas vienodai galimais rezultatais. Nagrinėkime įvykį A, kuris įvyksta, įvykus vienam iš k elementariųjų įvykių, ir neįvyksta, įvykus vienam iš kitų $n-k$ elementariųjų įvykių. Sakysime, kad elementarieji įvykiai, kuriems įvykus įvyksta ir A, yra *palankūs* įvykiui A.

2 pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas (žr. 1 pavyzdį). Įvykiui A (atvirtusių akučių skaičius yra 3 kartotinis) palankūs du elementarieji įvykiai U_3 ir U_6; įvykiui B (atvirtusių akučių skaičius yra pirminis) palankūs U_2, U_3, U_5; įvykiui C (atvirto 7 akutės) nėra palankus nė vienas elementarusis įvykis; įvykiui D (atvirtusių akučių skaičius mažesnis kaip 7) yra palankūs visi šeši elementarieji įvykiai.

Pastaba. Visų skirtingų įvykių, susijusių su bandymu, kurio rezultatai vienodai galimi, skaičius yra lygus visų elementariųjų įvykių aibės poaibių skaičiui, t.y. 2^n.

Apibrėžimas. *Įvykio A, susijusio su bandymu, kurio rezultatai yra vienodai galimi, tikimybe* $\mathbf{P}(A)$ vadinsime elementariųjų įvykių, palankių A, ir visų elementariųjų įvykių skaičių santykį $\frac{k}{n}$, t.y.

$$\mathbf{P}(A)=\frac{k}{n}.$$

Šį apibrėžimą vadinsime *klasikiniu tikimybės apibrėžimu.*

3 pavyzdys. 2 pavyzdyje nagrinėtų įvykių A, B, C, D tikimybės yra

$$\mathbf{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \mathbf{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},$$

$$\mathbf{P}(C)=\frac{0}{6}=0,\ \mathbf{P}(D)=\frac{6}{6}=1.$$

Pastaba. Įvykio tikimybė yra skaitinė funkcija, apibrėžta visų elementariųjų įvykių aibės poaibių aibėje.

Įvykio tikimybė tenkina nelygybes

$$0\leqslant \mathbf{P}(A)\leqslant 1.$$

Tai išplaukia betarpiškai iš apibrėžimo, nes akivaizdu, kad $0\leqslant k\leqslant n$.

Kadangi negalimam įvykiui nėra palankus nė vienas elementarusis įvykis, tai

$$\mathbf{P}(V)=\frac{0}{n}=0.$$

Būtinajam įvykiui yra palankūs visi elementarieji įvykiai, taigi

$$\mathbf{P}(U)=\frac{n}{n}=1.$$

Elementariajam įvykiui U_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ yra palankus tik vienas elementarusis įvykis (jis pats), todėl

$$\mathbf{P}(U_i)=\frac{1}{n} \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Taigi gavome tą patį rezultatą, kaip ir ankstesniame apibrėžime.

4 pavyzdys. Moneta metama du kartus. Raskite tikimybę, kad bent vieną kartą atvirs herbas.

Čia bus 4 elementarieji įvykiai:

U_1 – abu kartus atvirto herbas,
U_2 – herbas atvirto tik pirmą kartą metus monetą,
U_3 – herbas atvirto tik antrą kartą metus monetą,
U_4 – herbas neatvirto nė karto.

Įvykiui A (herbas atvirto bent kartą) palankūs U_1, U_2, U_3, todėl $\mathbf{P}(A)=\frac{3}{4}$.

5 pavyzdys. Abonentas nori paskambinti telefonu, bet užmiršo du paskutiniuosius numerio skaitmenis. Prisiminęs, kad tie skaitmenys yra skirtingi, surinko juos atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad numeris surinktas teisingai?

Du paskutiniuosius skaitmenis galima surinkti A_{10}^2 būdų, o įvykiui A (skaitmenys surinkti teisingai) bus palankus tik vienas būdas. Todėl

$$\mathbf{P}(A)=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{10\cdot 9}=\frac{1}{90}.$$

6 pavyzdys. Tarp 100 elektros lempučių 5 yra sugedusios. Rasime tikimybę, kad atsitiktinai paimtos trys lemputės bus nesugedusios.

Iš 100 elektros lempučių 3 lemputes galima išrinkti C_{100}^3 būdų, 3 nesugedusias lemputes galima paimti iš 95 nesugedusių C_{95}^3 būdų. Taigi ieškomoji tikimybė yra

$$\mathbf{P}=\frac{C_{95}^3}{C_{100}^3}=\frac{95\cdot 94\cdot 93}{100\cdot 99\cdot 98}\approx 0{,}86.$$

Klasikinis įvykio tikimybės apibrėžimas nėra universalus ir netinka bet kokiems atsitiktiniams įvykiams. Juo remiamasi tik paprasčiausiais atvejais, kai yra tam tikra simetrija, leidžianti nagrinėti baigtinę vienodai galimų įvykių aibę.

Sudėtingesniuose bandymuose skirtingų rezultatų skaičius gali būti begalinis, o ir patys rezultatai nėra vienodai galimi. Todėl tikimybių teorijoje be klasikinio apibrėžimo yra ir kitokių įvykio tikimybės apibrėžimų.

Statistinis įvykio tikimybės apibrėžimas pagrįstas įvykio dažnio sąvoka ir jo stabilumu. Pavyzdžiui, kryžminant geltonąjį žirnį su geltonuoju (žr. 1 skirsnio 2 pavyzdį), įvykio „atsirado žaliasis žirnis“ tikimybe laikomas skaičius $\frac{1}{4}$, nes, remiantis eksperimentais, jo dažniai svyruoja būtent apie tą skaičių.

Šiuolaikinės matematikos kurse tikimybė apibrėžiama aksiomiškai, kaip funkcija $\mathbf{P}(A)$, apibrėžta įvykių aibėje $\{A\}$ ir tenkinanti tris aksiomas:

1) bet kokiam įvykiui A teisinga nelygybė

$$\mathbf{P}(A)\geqslant 0;$$

2) būtinojo įvykio tikimybė lygi vienetui;

3) poromis nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sumai.

Pratimai

5. Iš urnos, kurioje yra 3 balti, 4 juodi ir 5 raudoni rutuliai, atsitiktinai ištrauktas vienas rutulys. Raskite tikimybę, kad rutulys yra:

a) baltas, b) juodas, c) geltonas, d) raudonas.

6. Raskite tikimybę, kad, vieną kartą metus du lošimo kauliukus, atvirtusių akučių suma bus 8.

7. Loterijoje yra 50 bilietų, ir 8 iš jų laimi. Raskite tikimybę, kad iš penkių pirmųjų atsitiktinai paimtų bilietų laimės du.

8. Krepšinio pirmenybėse dalyvauja 18 komandų, tarp jų yra 2 aukščiausios klasės komandos. Norint sumažinti komandos sužaistų rungtynių skaičių, burtų keliu komandos buvo suskirstytos į dvi grupes. Raskite tikimybę, kad dvi aukščiausios klasės komandos bus:

a) skirtinguose pogrupiuose;

b) viename pogrupyje.

§ 29. PAGRINDINĖS TIKIMYBIŲ TEORIJOS TEOREMOS IR JŲ IŠVADOS

1. Sudėties teorema. Ankstesniuose pavyzdžiuose įvykių tikimybė buvo randama betarpiškai remiantis apibrėžimu. Tačiau taip daryti galima tik pačiais paprasčiausiais atvejais. Dažniausiai suskaičiuoti visus elementariuosius ir palankius įvykius būna sunku, o kartais praktiškai ir neįmanoma. Įvykių tikimybes galima rasti žymiai paprasčiau, remiantis teoremomis, nusakančiomis tikimybių sąryšius.

1 teorema. *Dviejų nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybė lygi tų įvykių tikimybių sumai, t.y.*

$$\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B). \tag{1}$$

Įrodymas. Sakykime, įvykiui A yra palankūs k elementariųjų įvykių, o įvykiui B palankūs l elementariųjų įvykių. Kadangi įvykiai A ir B nesutaikomi, tai tarp elementariųjų įvykių U_i ($i=1, 2, \ldots, n$) nėra palankių abiem įvykiams kartu. Todėl įvykiui $A\cup B$ bus $k+l$ palankių elementariųjų įvykių. Remiantis tikimybės apibrėžimu,

$$\mathbf{P}(A)=\frac{k}{n},\ \mathbf{P}(B)=\frac{l}{n},\ \mathbf{P}(A\cup B)=\frac{k+l}{n}.$$

Taigi teorema įrodyta. Pastebėsime, jog sąlyga, kad įvykiai būtų nesutaikomi, yra esminė.

Įrodytoji teorema vadinama *nesutaikomų įvykių sudėties teorema.*

1 išvada. *Priešingų įvykių tikimybių suma lygi vienetui, t.y.*

$$\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{A})=1. \qquad (2)$$

Kadangi įvykiai A ir $\bar{A}$ yra nesutaikomi, tai, remiantis sudėties teorema,

$$\mathbf{P}(A \cup \bar{A})=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{A}).$$

Kadangi įvykis $A \cup \bar{A}$ yra būtinas ir $\mathbf{P}(A \cup \bar{A})=1$, tai $\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(\bar{A})=1$.

1 pastaba. Labai dažnai praktikoje, ieškant įvykio tikimybės, paprasčiau rasti priešingo įvykio tikimybę; tuomet

$$\mathbf{P}(A)=1-\mathbf{P}(\bar{A}).$$

2 pastaba. (2) formulę galime gauti ne tik kaip sudėties teoremos išvadą, bet ir betarpiškai: jeigu įvykiui A yra palankūs k elementariųjų įvykių, tai įvykiui $\bar{A}$ yra palankūs visi kiti $n-k$ elementariųjų įvykių.

Sudėties teoremą apibendrinsime bet kuriam baigtiniam įvykių skaičiui.

2 teorema. *Poromis nesutaikomų įvykių sąjungos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sumai, t.y.*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\ldots+\mathbf{P}(A_m). \qquad (3)$$

Įrodoma analogiškai, kaip ir nagrinėjant dviejų įvykių sudėtį.

2 išvada. *Įvykių, sudarančių pilnąją poromis nesutaikomų įvykių aibę, tikimybių suma lygi vienetui.*

Įrodymas. Sakykime, įvykiai $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sudaro pilnąją poromis nesutaikomų įvykių aibę. Kadangi įvykiai yra poromis nesutaikomi, tai, remiantis sudėties teorema,

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m)=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\ldots+\mathbf{P}(A_m).$$

Kadangi įvykiai sudaro pilnąją aibę, tai jų sąjunga yra būtinas įvykis

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m=U.$$

Kadangi $\mathbf{P}(U)=1$, tai

$$\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\ldots+\mathbf{P}(A_m)=1.$$

Dviejų įvykių sudėties teoremą galima apibendrinti ir kitaip. Atmetus sąlygą, kad įvykiai būtų nesutaikomi, galima įrodyti bendresnę teoremą. Iš jos, kaip atskiras atvejis, išplaukia 1 teorema.

3 teorema. *Bet kurių dviejų įvykių sąjungos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sumos ir jų sankirtos tikimybės skirtumui, t.y.*

$$\mathbf{P}(A \cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)-\mathbf{P}(A \cap B). \qquad (4)$$

Įrodymas. Sakykime, įvykiui A palankūs k, įvykiui B palankūs l ir įvykiui $A \cap B$ palankūs q elementariųjų įvykių. Jeigu iš viso yra n elementariųjų įvykių, tai, remiantis tikimybės apibrėžimu,

$$\mathbf{P}(A)=\frac{k}{n}, \quad \mathbf{P}(B)=\frac{l}{n}, \quad \mathbf{P}(A \cap B)=\frac{q}{n}.$$

Akivaizdu, kad tuo atveju įvykiui $A \cup B$ bus palankūs $k+l-q$ elementariųjų įvykių, todėl

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{k+l-q}{n} = \frac{k}{n} + \frac{l}{n} - \frac{q}{n} = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B),$$

t.y. (4) formulė įrodyta.

Atskiru atveju, kai įvykiai yra nesutaikomi, t.y. $A \cap B = V$, $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$, gauname 1 teoremą.

2. Sąlyginė tikimybė. Daugybos teorema. Įvykių nepriklausomumas. Paprasčiausi stebėjimai rodo, kad kai kuriais atvejais vieno įvykio įvykimas neturi įtakos kito įvykio tikimybei, o kai kuriais atvejais priešingai – vieno įvykio įvykimas turi esminės įtakos kito įvykio tikimybei.

Sakykime, metame monetą du kartus. Įvykio A (herbas atvirto metus antrą kartą) tikimybė nepriklauso, ar įvykis B (herbas atvirto metus pirmą kartą) įvyko, ar neįvyko. Jeigu iš urnos, kurioje yra vienas baltas ir vienas juodas rutuliai, atsitiktinai ištraukiamas ir negrąžinamas atgal vienas rutulys, tai sąryšis tarp įvykių A (pirmas ištrauktas rutulys yra baltas) ir B (antras ištrauktas rutulys yra baltas) visai kitoks: jeigu A įvyko, tai B jau negali įvykti. Jeigu vienas įvykis įvyko, tai šiuo atveju kitas įvykti negali.

Nagrinėsime įvykius A ir B, susijusius su tam tikru bandymu. Sakykime, įvykiui B yra l palankių, o įvykiui $A \cap B$ yra q palankių elementariųjų įvykių. Elementariųjų įvykių, palankių įvykiui $A \cap B$ ir palankių įvykiui B, skaičių santykį, t.y. santykį $\frac{q}{l}$, vadinsime įvykio A *sąlygine* tikimybe, kai įvykis B yra įvykęs, ir žymėsime

$$\mathbf{P}(A \mid B).$$

Vadinasi, remiantis apibrėžimu,

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{q}{l}.$$

Apibrėžimą iliustruosime pavyzdžiu. Sakykime, metamas lošimo kauliukas. Įvykis B yra lyginio akučių skaičiaus atvirtimas, o įvykis A – šešiukės atvirtimas. Tada įvykiui B yra palankūs 3 ($l=3$) elementarieji įvykiai, o įvykiui $A \cap B$ – tik vienas ($q=1$). Vadinasi, įvykio A sąlyginė tikimybė, kai įvykis B yra įvykęs, lygi $\frac{q}{l} = \frac{1}{3}$.

Atkreipkite dėmesį, kad įvykio A tikimybė $\mathbf{P}(A)$ be jokios papildomos informacijos apie bandymo rezultatą lygi $\frac{1}{6}$.

Jeigu tik žinoma, kad, metus lošimo kauliuką, atvirto lyginis akučių skaičius (įvyko įvykis B), tai įvykio A tikimybė su ta sąlyga lygi $\frac{1}{3}$, t.y. $\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{1}{3}$.

4 teorema. *Sąlyginei tikimybei* $\mathbf{P}(A \mid B)$ *teisinga formulė*

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}. \qquad (1)$$

(1) formulė vadinama sąlyginės tikimybės formule.

Įrodymas. Sakykime, l yra įvykiui B palankių elementariųjų įvykių skaičius, q – įvykiui $A \cap B$ palankių elementariųjų įvykių skaičius. Tada

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{q}{l},$$

arba

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \frac{\frac{q}{n}}{\frac{l}{n}};$$

čia n yra visų elementariųjų įvykių skaičius. Kadangi

$$\frac{q}{n} = \mathbf{P}(A \cap B), \quad \frac{l}{n} = \mathbf{P}(B),$$

tai (1) formulė yra teisinga.

Visiškai analogiškai gausime ir įvykio B sąlyginės tikimybės, kai A yra įvykęs, formulę

$$\mathbf{P}(B \mid A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)}. \quad (2)$$

(1) ir (2) formules galime užrašyti šitaip:

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A \mid B). \quad (3)$$

(3) formulė išreiškia dviejų bet kurių įvykių sankirtos tikimybę tų įvykių tikimybėmis ir sąlyginėmis tikimybėmis. Įrodytoji teorema vadinama daugybos teorema.

5 teorema. *Dviejų bet kurių įvykių sankirtos tikimybė yra lygi vieno įvykio tikimybės ir antro įvykio sąlyginės tikimybės, kai pirmasis yra įvykęs, sandaugai.*

Remiantis sąlyginės tikimybės sąvoka, galima apibrėžti svarbią dviejų įvykių nepriklausomumo sąvoką.

Apibrėžimas. Sakysime, kad įvykis A *nepriklauso* nuo įvykio B, jeigu A sąlyginė tikimybė, kai B yra įvykęs, yra lygi A tikimybei, t.y.

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A).$$

Priešingu atveju, t.y. kai

$$\mathbf{P}(A \mid B) \neq \mathbf{P}(A),$$

sakysime, kad įvykis A priklauso nuo įvykio B.

Iš lygybės (žr. (3) formulę)

$$\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A \mid B)$$

išplaukia: jeigu įvykis A nepriklauso nuo B, t.y.

$$\mathbf{P}(A \mid B) = \mathbf{P}(A), \text{ tai } \mathbf{P}(B \mid A) = \mathbf{P}(B),$$

t.y. įvykis B nepriklauso nuo A. Vadinasi, nepriklausomumo savybė yra abipusė.

1 pavyzdys. Iš 36 kortų kaladės atsitiktinai ištraukta viena korta. Nustatykite, ar įvykiai A (ištrauktas tūzas) ir B (ištraukta raudonos spalvos korta) yra nepriklausomi.

Iš visų 36 elementariųjų įvykių 4 yra palankūs įvykiui A, todėl $\mathbf{P}(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$. Jeigu įvykis B įvyko, tai įvyko vienas iš 18 elementariųjų įvykių, iš kurių 2 palankūs įvykiui A, taigi

$$\mathbf{P}(A \mid B)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{P}(A \mid B)=\mathbf{P}(A),$$

t.y. įvykiai A ir B yra nepriklausomi.

Pratimai

1. Įrodykite, kad įvykiai A ir $\bar{B}$ yra nepriklausomi, jeigu nepriklausomi įvykiai A ir B.
2. Įrodykite, kad įvykiai $\bar{A}$ ir $\bar{B}$ yra nepriklausomi, jeigu nepriklausomi įvykiai A ir B.

Iš daugybos teoremos kaip atskiras atvejis išplaukia nepriklausomų įvykių daugybos teorema.

6 teorema. *Dviejų nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sandaugai*:

$$\mathbf{P}(A \cap B)=\mathbf{P}(A)\cdot\mathbf{P}(B). \qquad (4)$$

Iš tikrųjų, jeigu A ir B yra nepriklausomi įvykiai, tai $\mathbf{P}(B \mid A)=\mathbf{P}(B)$ ir (3) formulė virsta (4) formule.

Šeštąją teoremą vadinsime *dviejų nepriklausomų įvykių daugybos teorema.*

Dabar iškyla svarbus klausimas: ar galima ir, jeigu galima, tai kaip apibendrinti 6 teoremą bet·kuriam baigtiniam įvykių skaičiui? Kada trijų ir daugiau įvykių sankirtos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sandaugai? Pirmiausia apibrėšime šitokią sąvoką.

Apibrėžimas. Įvykius $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m>2)$ vadinsime *poromis nepriklausomais*, jeigu bet kurie du iš tų įvykių yra nepriklausomi.

Ar galima tvirtinti, kad įvykių sankirtos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sandaugai, jeigu tie įvykiai poromis nepriklausomi? Parodysime pavyzdžiu, kad apskritai taip nėra.

2 pavyzdys. Urnoje yra 4 rutuliai: raudonas, geltonas, žalias ir vienas rutulys, nudažytas visomis tomis spalvomis. Iš urnos atsitiktinai ištraukiame rutulį. Nagrinėsime įvykius:

A (ištraukėme raudoną rutulį),
B (ištraukėme geltoną rutulį),
C (ištraukėme žalią rutulį).

Ar įvykiai A, B, C bus poromis nepriklausomi? Akivaizdu, kad iš viso yra keturi elementarieji įvykiai:

U_1 – ištrauktas raudonas rutulys,
U_2 – ištrauktas geltonas rutulys,
U_3 – ištrauktas žalias rutulys,
U_4 – ištrauktas trispalvis rutulys.

Įvykiui A yra palankūs elementarieji įvykiai U_1 ir U_4, todėl $\mathbf{P}(A)=$ $=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Dabar rasime įvykio A sąlyginę tikimybę, kai B yra įvykęs. Jeigu įvykis B įvyko, tai įvyko elementarieji įvykiai U_2 ir U_4, iš kurių įvykiui A yra palankus tik U_4.

Vadinasi, $\mathbf{P}(A \mid B)=\frac{1}{2}$, todėl įvykiai A ir B yra nepriklausomi. Analogiškai gautume:

$$\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(B \mid C)=\frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(C)=\mathbf{P}(C \mid A)=\frac{1}{2}.$$

Taigi porų B ir C bei C ir A įvykiai yra nepriklausomi. Vadinasi, įvykiai A, B, C yra poromis nepriklausomi.

Ar tiems įvykiams bus teisinga formulė

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C)?$$

Akivaizdu, kad ne, nes $\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C)=\frac{1}{8}$, o $\mathbf{P}(A \cap B \cap C)=\frac{1}{4}$. Juk įvykiui $A \cap B \cap C$ palankus tik elementarusis įvykis U_4.

Norėdami (4) formulę apibendrinti, turėsime apibrėžti naują sąvoką.

Apibrėžimas. Įvykius $A_1, A_2, \ldots, A_m$ $(m>2)$ vadinsime *kartu nepriklausomais*, jeigu bet kuris įvykis ir bet kurio likusių įvykių skaičiaus sankirta yra nepriklausomi įvykiai.

Išsiaiškinsime skirtumą tarp nepriklausomumo poromis ir kartu, nagrinėdami tris įvykius. Kad įvykiai A, B, C būtų poromis nepriklausomi, būtina, jog A ir B, B ir C, C ir A būtų nepriklausomi. Kad įvykiai būtų nepriklausomi kartu, jie turi būti poromis nepriklausomi ir dar turi būti nepriklausomi įvykiai A ir $B \cap C$, B ir $C \cap A$, C ir $A \cap B$. Vadinasi, įvykiai gali būti poromis nepriklausomi ir nebūti nepriklausomi kartu. 2 pavyzdyje išnagrinėti įvykiai yra, kaip įrodėme, poromis nepriklausomi, bet nėra nepriklausomi kartu. Iš tikrųjų, įvykiai A ir $B \cap C$ yra priklausomi, nes, įvykus $B \cap C$, įvyksta ir elementarusis įvykis U_4, kuriam įvykus būtinai įvyksta A, t.y.

$$\mathbf{P}(A \mid B \cap C)=1.$$

Todėl

$$\mathbf{P}(A) \neq \mathbf{P}(A \mid B \cap C).$$

7 teorema. *Trijų kartu nepriklausomų įvykių sankirtos tikimybė yra lygi tų įvykių tikimybių sandaugai, t.y.*

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C)=\mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C). \tag{5}$$

Įrodymas. Pažymėkime $B \cap C = D$. Kadangi įvykiai A ir D yra nepriklausomi, tai, remiantis 6 teorema,

$$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A \cap D) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(D).$$

Kadangi įvykiai B ir C yra taip pat nepriklausomi, tai

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(C).$$

Įrašę $\mathbf{P}(D)$ išraišką į pirmąją formulę, gausime teoremos teiginį.

Iš to įrodymo aišku, kad matematinės indukcijos metodu atitinkamą teoremą galima įrodyti bet kuriam baigtiniam kartu nepriklausomų įvykių skaičiui.

Pastaba. Daugybos ir sudėties teoremas įrodėme, kai bandymų rezultatai buvo vienodai galimi. Tačiau gautosios formulės yra teisingos ir sudėtingesniais atvejais, kai klasikinis tikimybės apibrėžimas nepakankamas ir reikia remtis statistiniu arba aksiominiu apibrėžimais. Kaip jau minėjome, jeigu tikimybė apibrėžiama aksiomiškai, tai 1 skirsnio (1) formulė laikoma aksioma, todėl ją vadinsime tikimybių sudėties aksioma. Tada (1) ir (4) formulėmis apibrėžiame sąlyginę tikimybę ir įvykių nepriklausomumą.

Toliau, remdamiesi įrodytomis teoremomis, apskaičiuosime įvairių įvykių tikimybes.

3 pavyzdys. TKS (techninės kontrolės skyrius) tikrina pusę partijos gaminių ir pripažįsta partiją standartine, jeigu tarp patikrintųjų randama ne daugiau kaip vienas brokuotinas gaminys. Raskite tikimybę, kad 20 gaminių partija, kurioje yra 2 brokuoti gaminiai, bus pripažinta standartine.

Sakykime, įvykis A yra „tarp tikrinamų gaminių brokuotinų nėra", o įvykis B — „tarp tikrinamų gaminių yra tik vienas brokuotinas". Gaminių partija bus pripažinta standartine, jeigu įvyks įvykis $A \cup B$. Kadangi įvykiai A ir B yra nesutaikomi, tai

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

Rasime įvykio A tikimybę. Iš 20 gaminių 10 tikrinamų galima parinkti C_{20}^{10} būdų. Iš standartinių gaminių 10 galima parinkti C_{18}^{10} būdų. Todėl

$$\mathbf{P}(A) = \frac{C_{18}^{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{18!\,10!}{8!\,20!} = \frac{10\cdot 9}{20\cdot 19} = \frac{9}{38}.$$

Įvykiui B palankių įvykių skaičius yra $C_{18}^{9}\cdot C_{2}^{1}$ (9 standartinių ir vieno brokuoto gaminių išrinkimo būdų skaičius). Todėl

$$\mathbf{P}(B) = \frac{C_{18}^{9}\,C_{2}^{1}}{C_{20}^{10}} = \frac{18!\,10!\,10!\,2}{9!\,9!\,20!} = \frac{10\cdot 10\cdot 2}{20\cdot 19} = \frac{20}{38}.$$

Pagal nesutaikomų įvykių sudėties teoremą

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{9}{38} + \frac{20}{38} = \frac{29}{38}.$$

4 pavyzdys. Iš 36 kortų kaladės atsitiktinai traukiama viena korta. Rasime tikimybę, kad bus ištraukta lapų korta arba tūzas.

Įvykiai A (ištraukta lapų korta) ir B (ištrauktas tūzas) nėra nesutaikomi. Todėl įvykio $A \cup B$ tikimybę rasime pagal formulę

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B).$$

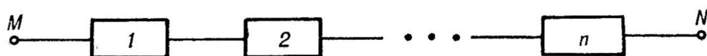
Randame įvykių A, B ir $A \cap B$ tikimybes:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{9}, \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

5 pavyzdys. Elektrinę grandinę sudaro n nuosekliai sujungtų elementų, kiekvienas iš jų veikia nepriklausomai nuo kitų. Raskite tikimybę (grandinės patikimumą), kad visa grandinė veiks, jeigu tikimybė, kad kiekvienas elementas per tam tikrą laikotarpį nesuges (vadinamieji elementų patikimumai) yra $p_1, p_2, \ldots, p_n$.



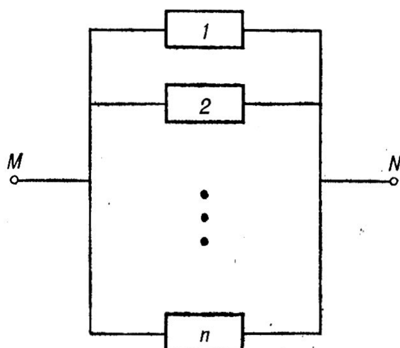
Pažymėkime A_i įvykį „i-asis elementas negenda“ ir A – įvykį „veikia visa grandinė“. Tada

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

Kadangi įvykiai A_i yra kartu nepriklausomi, tai

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(A_2)\,\ldots\,\mathbf{P}(A_n) = p_1 p_2 \ldots p_n.$$

6 pavyzdys. Elektrinę grandinę sudaro n lygiagrečiai sujungtų elementų, kiekvienas iš jų veikia nepriklausomai nuo kitų.



Raskite tikimybę (grandinės patikimumą), kad grandinė veiks, jeigu tikimybės, kad kiekvienas elementas nesuges per tam tikrą laikotarpį, yra $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Sakykime, A_i ir A yra įvykiai, nagrinėti 5 pavyzdyje. Norint rasti įvykio A tikimybę, patogiau iš pradžių apskaičiuoti įvykio $\bar{A}$ tikimybę. Akivaizdu, kad

$$\bar{A}=\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n,$$

nes grandinė sugenda tada ir tik tada, kai sugenda visi grandinės elementai. Remiantis uždavinio sąlyga, įvykiai A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ yra kartu nepriklausomi, taigi įvykiai $\bar{A}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ taip pat kartu nepriklausomi. Remiantis kartu nepriklausomų įvykių daugybos teorema,

$$\mathbf{P}(\bar{A})=\mathbf{P}(\bar{A}_1)\,\mathbf{P}(\bar{A}_2)\ \ldots\ \mathbf{P}(\bar{A}_n),$$

taigi

$$1-\mathbf{P}(A)=\left(1-\mathbf{P}(A_1)\right)\left(1-\mathbf{P}(A_2)\right)\ \ldots\ \left(1-\mathbf{P}(A_n)\right).$$

Vadinasi,

$$\mathbf{P}(A)=1-(1-p_1)(1-p_2)\ \ldots\ (1-p_n).$$

7 pavyzdys. Nagrinėsime tokią pat grandinę, kaip ir pirmesniajame pavyzdyje, tik čia $p_1=p_2=\ldots=p_n=p=0{,}7$. Iš kelių elementų turi būti sudaryta grandinė, kad jos patikimumas būtų didesnis kaip 0,99?

Remiantis pirmesniojo uždavinio rezultatu, $\mathbf{P}(A)=1-(1-p)^n$. Taigi elementų skaičius n tenkina nelygybę

$$1-(1-p)^n>0{,}99,$$

kurią išsprendę, gauname

$$(1-p)^n<0{,}01,$$

$$n\lg(1-p)<\lg 0{,}01 = -2,$$

$$n>-\frac{2}{\lg(1-p)}.$$

Jeigu $p=0{,}7$, tai $n>-\dfrac{2}{\lg 0{,}3}\approx 3{,}8$, t.y. tuo atveju grandinę turi sudaryti ne mažiau kaip 4 elementai.

8 pavyzdys. Įrodysime, jog labiau tikėtina, kad, metus vieną kartą keturis lošimo kauliukus, atvirs bent viena šešiukė, negu, metus 24 kartus du lošimo kauliukus, bent vieną kartą ant abiejų kauliukų atvirs šešiukės. (XVII a. šį uždavinį Paskaliui pateikė de Merė, todėl jis vadinamas pastarojo vardu. De Merė, nagrinėdamas lošimo kauliukais uždavinius, klaidingai laikė tuos įvykius vienodai galimais.)

Sakykime, A yra įvykis „metus vieną kartą keturis lošimo kauliukus, atvirsta bent viena šešiukė“. Iš pradžių rasime įvykio $\bar{A}$ tikimybę. Įvykis $\bar{A}$ įvyks, jeigu vienu metu įvyks keturi kartu nepriklausomi įvykiai: šešiukė neatvirs ant pirmojo, antrojo, trečiojo ir ketvirtojo kauliuko. Kiekvieno

to įvykio tikimybė lygi $\frac{5}{6}$. Jų sankirtos tikimybė, remiantis kartu nepriklausomų įvykių daugybos teorema, lygi $\left(\frac{5}{6}\right)^4$, t.y. $\mathbf{P}(\bar{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^4$. Todėl

$$\mathbf{P}(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^4\approx 0{,}52.$$

Sakykime, B yra įvykis „metus 24 kartus du kauliukus, bent vieną kartą ant abiejų atvirs šešiukės". To įvykio tikimybę rasime analogiškai, kaip ir įvykio A tikimybę. Tikimybė, kad dvi šešiukės neatvirs, lygi: metus kauliuką pirmą kartą – $\frac{35}{36}$, metus kauliuką ir pirmą, ir antrą kartą – $\left(\frac{35}{36}\right)^2$, metus 24 kartus – $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, t.y. $\mathbf{P}(\bar{B})=\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$. Vadinasi,

$$\mathbf{P}(B)=1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24}\approx 0{,}49.$$

Pratimai

3. Du šauliai po vieną kartą šauna į taikinį. Kiekvieno šaulio pataikymo tikimybės atitinkamai lygios 0,7 ir 0,8. Raskite tikimybę, kad bus

a) pataikyta bent kartą,

b) pataikyta vieną kartą.

4. Studentas moka 20 iš 25 programos klausimų. Raskite tikimybę, kad studentas mokės du egzaminatoriaus užduotus klausimus.

5. Ar gali nesutaikomi įvykiai būti poromis nepriklausomi?

6. Ar įvykiai, sudarantys pilnąją įvykių aibę, gali būti kartu nepriklausomi?

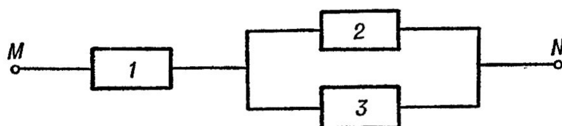
7. Sakykime, moneta yra metama du kartus ir nagrinėkime įvykius: A (herbas atvirto pirmą kartą), B (herbas atvirto bent kartą) ir C (herbas atvirto antrą kartą). Nustatykite, ar porų A ir B, B ir C, C ir A įvykiai yra priklausomi, ar ne.

8. Metame du lošimo kauliukus. Sakykime, A yra įvykis, kad ant pirmojo kauliuko atvirto nelyginis akučių skaičius, B – įvykis, kad ant antrojo kauliuko atvirto nelyginis akučių skaičius, C – įvykis, kad akučių, atvirtusių ant abiejų kauliukų, suma yra nelyginis skaičius.

Nustatykite, ar įvykiai A, B, C yra poromis nepriklausomi ir ar jie yra kartu nepriklausomi.

9. Darbininkas prižiūri 3 stakles, dirbančias nepriklausomai vienos nuo kitų. Tikimybė, kad per pamainą staklės nesuges, yra atitinkamai $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}2$.

Raskite tikimybę, kad per pamainą bent vienos staklės suges.

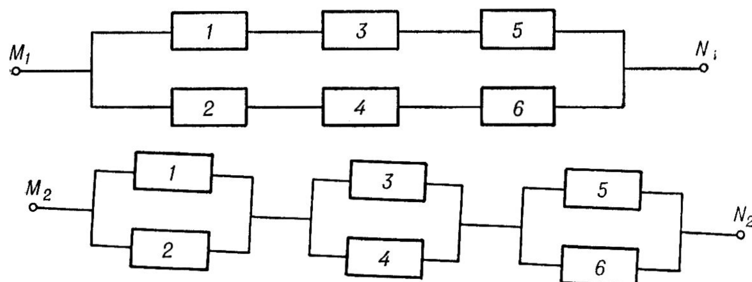


10. Elektrinę grandinę sudaro trys elementai. Kiekvienas iš jų veikia nepriklausomai nuo kitų dviejų. Tikimybė, kad elementas nesuges per tam tikrą laikotarpį, yra atitinkamai $p_1=0{,}9$, $p_2=p_3=0{,}7$. Raskite tikimybę, kad grandinė nesuges per tą patį laikotarpį.

11. Dvi elektrinės grandinės sudarytos pagal schemas, parodytas paveiksle. Kiekvienas elementas veikia nepriklausomai nuo kitų, ir tikimybė, kad jis nesuges per tam tikrą

laikotarpį, yra P. Raskite tikimybę, kad kiekviena grandinė normaliai veiks. Kuri grandinė patikimesnė?

12. Televizoriuje yra 12 lempų. Kiekviena lempa veikia nepriklausomai nuo kitų ir tikimybė, kad ji nesuges per vienerius metus, lygi P. Raskite tikimybę, kad per vienerius metus bent viena lempa suges.



13. Kiek kartų reikia mesti lošimo kauliuką, kad tikimybė atvirsti bent vienai šešiukei būtų didesnė kaip 0,99?

14. Du asmenys paeiliui traukia rutulius iš urnos, kurioje yra 2 balti ir 4 juodi rutuliai. Raskite tikimybę, kad konkretus asmuo pirmas ištrauks baltą rutulį.

3. Pilnosios tikimybės formulė. Iš sudėties ir daugybos teoremų išplaukia svarbi vadinamoji pilnosios tikimybės formulė. Ja dažnai remsimės, spręsdami įvairius uždavinius.

Sakykime, $H_1, H_2, \ldots, H_n$ yra pilnoji aibė poromis nesutaikomų įvykių, susijusių su tam tikru bandymu, o A – bet kuris su tuo bandymu susijęs įvykis. Akivaizdu, kad bet kuriam įvykiui yra teisinga lygybė $A = A \cap U$. Be to, remiantis pilnosios įvykių aibės apibrėžimu,

$$U = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n,$$

todėl

$$A = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n).$$

Remiantis distributyvumo dėsniu, paskutinį sąryšį galima užrašyti šitaip:

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n).$$

Įrodysime: jeigu įvykiai $H_1, H_2, \ldots, H_n$ yra poromis nesutaikomi, tai ir įvykiai $A \cap H_1, A \cap H_2, \ldots, A \cap H_n$ taip pat poromis nesutaikomi. Iš tikrųjų, su bet kokiais i ir j $(i \neq j)$ bus

$$(A \cap H_i) \cap (A \cap H_j) = (A \cap A) \cap (H_i \cap H_j) = A \cap V = V.$$

Remiantis poromis nesutaikomų įvykių sudėties teorema,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap H_1) + \mathbf{P}(A \cap H_2) + \ldots + \mathbf{P}(A \cap H_n)$$

arba trumpiau

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A \cap H_i).$$

Tačiau, remiantis daugybos teorema,

$$\mathbf{P}(A \cap H_i) = \mathbf{P}(H_i)\,\mathbf{P}(A \mid H_i),$$

todėl

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\,\mathbf{P}(A \mid H_i). \qquad (1)$$

Ta formulė vadinama *pilnosios tikimybės formule*, o įvykiai $H_1, H_2, \ldots, H_n$ paprastai vadinami *hipotezėmis*. (1) formule naudosimės tais atvejais, kai betarpiškai rasti įvykio A tikimybę yra sunku, o sąlygines tikimybes $\mathbf{P}(A \mid H_i)$ ir hipotezių tikimybes $\mathbf{P}(H_i)$ nesunku rasti.

1 pavyzdys. Iš 50 detalių 18 pagaminta pirmajame ceche, 20 – antrajame, likusios – trečiajame. Pirmajame arba trečiajame cechuose pagaminta detalė yra labai geros kokybės su tikimybe 0,9, antrajame ceche – su tikimybe 0,6. Raskite tikimybę, kad atsitiktinai paimta detalė bus labai geros kokybės.

Sakykime, A yra įvykis, kad atsitiktinai paimta detalė yra labai geros kokybės, o H_1, H_2, H_3 – įvykiai (hipotezės), kad detalė yra pagaminta atitinkamai pirmajame, antrajame ir trečiajame cechuose. Randame hipotezių tikimybes:

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{18}{50}, \quad \mathbf{P}(H_2) = \frac{20}{50}, \quad \mathbf{P}(H_3) = \frac{12}{50}.$$

Sąlyginės įvykio A tikimybės, kai yra teisingos hipotezės H_1, H_2 ir H_3, yra duotos:

$$\mathbf{P}(A \mid H_1) = 0{,}9, \quad \mathbf{P}(A \mid H_2) = 0{,}6, \quad \mathbf{P}(A \mid H_3) = 0{,}9.$$

Remiantis pilnosios tikimybės formule,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\,\mathbf{P}(A \mid H_1) + \mathbf{P}(H_2)\,\mathbf{P}(A \mid H_2) + \mathbf{P}(H_3)\,\mathbf{P}(A \mid H_3) =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{18}{50} + \frac{6}{10} \cdot \frac{20}{50} + \frac{9}{10} \cdot \frac{12}{50} = \frac{39}{50} = 0{,}78.$$

2 pavyzdys. Studentas Petrovas moka ne visus egzaminų bilietų klausimus. Kaip jam naudingiau atsakinėti – pirmam ar antram? „Gerais“ vadinsime tuos bilietus, kurių klausimus Petrovas moka. Sakykime, „gerų“ bilietų yra k, o iš viso yra n $(k < n)$ bilietų. Tada įvykio A (Petrovas ištraukė „gerą“ bilietą) tikimybė, kai jis atsakinėja pirmas, yra $\mathbf{P}(A) = \frac{k}{n}$.

Jeigu Petrovas atsakinėja antras, tai įvykio A tikimybę rasime, išnagrinėję dvi hipotezes: H_1 (studentas, atsakinėjęs prieš Petrovą, ištraukė „gerą“ bilietą) ir H_2 (studentas, atsakinėjęs pirmas, ištraukė „blogą“ bilietą). Hipotezių H_1 ir H_2 tikimybės yra:

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{k}{n} \text{ ir } \mathbf{P}(H_2) = \frac{n-k}{n}.$$

Įvykio A sąlyginė tikimybė, kai teisinga hipotezė H_1, yra

$$\mathbf{P}(A \mid H_1) = \frac{k-1}{n-1}.$$

Jeigu teisinga antroji hipotezė, tai įvykio A sąlyginė tikimybė

$$\mathbf{P}(A \mid H_2) = \frac{k}{n-1}.$$

Remiantis pilnosios tikimybės formule,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\,\mathbf{P}(A \mid H_1) + \mathbf{P}(H_2)\,\mathbf{P}(A \mid H_2) =$$

$$= \frac{k}{n}\cdot\frac{k-1}{n-1} + \frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n-1} = \frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\,(k-1+n-k) = \frac{k}{n}.$$

Taigi tikimybė, jog bus ištrauktas „geras“ bilietas, abiem atvejais yra ta pati, t.y. nepriklauso, ar Petrovas atsakinės pirmas, ar antras.

Pratimai

15. Prietaisas dirba palankiomis ir nepalankiomis sąlygomis, palankus darbo režimas sudaro 80% visų darbo atvejų. Tikimybė, jog prietaisas suges per valandą, kai darbo režimas palankus, lygi 0,1, kai nepalankus, – 0,7. Raskite tikimybę, kad prietaisas nesuges per valandą.

16. Trejos staklės gamina 50, 30 ir 20% visų gaminių. Broko jos gamina atitinkamai 1, 2 ir 1,5%. Raskite tikimybę, kad atsitiktinai paimtas gaminys bus brokas.

17. Radijo lempa gali būti pagaminta bet kuriame iš trijų fabrikų su tikimybe atitinkamai 0,25; 0,50; 0,25. Tikimybės, kad tuose fabrikuose pagaminta lempa suges per vienerius metus, atitinkamai lygios 0,1; 0,2; 0,4. Raskite tikimybę, kad lempa veiks ištisus metus.

4. Bejeso formulė. Sakykime, urnoje yra trys rutuliai; kiekvienas iš jų gali būti arba juodas, arba baltas, bet nežinome, kiek urnoje yra baltų ir kiek juodų rutulių. Todėl gali būti teisinga bet kuri iš keturių hipotezių: H_0 – urnoje nėra baltų rutulių, H_1 – urnoje 1 baltas rutulys, H_2 – urnoje 2 balti rutuliai ir H_3 – urnoje 3 balti rutuliai. Visas hipotezes galime laikyti vienodai galimomis, nes nėra jokių žinių apie baltų rutulių skaičių. Sakykime, iš urnos atsitiktinai ištraukėme vieną baltą rutulį. Aišku, po to jau negalime laikyti, jog visos minėtosios hipotezės yra vienodai galimos. Kadangi atsitiktinai paimtas rutulys buvo baltas, tai pagrįstai galime manyti, jog baltų rutulių urnoje yra daugiau negu juodų; hipotezę H_0 turime atmesti. Vadinasi, dėl to, kad atsitiktinai ištrauktas rutulys yra baltas, reikia perskaičiuoti hipotezių tikimybes. Jas perskaičiuosime, remdamiesi Bejeso formule, kurią išvesime iš daugybos teoremos ir pilnosios tikimybės formulės.

Sakykime, A yra bet koks įvykis, o $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sudaro pilnąją poromis nesutaikomų įvykių aibę. Tada, remiantis daugybos teorema,

$$\mathbf{P}(A \cap H_i) = \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(H_i \mid A) = \mathbf{P}(H_i)\,\mathbf{P}(A \mid H_i),$$

todėl

$$\mathbf{P}(H_i \mid A) = \frac{\mathbf{P}(H_i)\,\mathbf{P}(A \mid H_i)}{\mathbf{P}(A)} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Tikimybę $\mathbf{P}(A)$ pakeitę jos išraiška pagal pilnosios tikimybės formulę, gausime *Bejeso formulę hipotezių tikimybėms perskaičiuoti*:

$$\mathbf{P}(H_i \mid A)=\frac{\mathbf{P}(H_i)\,\mathbf{P}(A \mid H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{P}(H_i)\,\mathbf{P}(A \mid H_i)} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (1)$$

Remdamiesi (1) formulėmis, sąlygines hipotezių H_i tikimybes, kai įvykis A yra įvykęs, išreiškiame tikimybėmis $\mathbf{P}(H_i)$ ir sąlyginėmis tikimybėmis $\mathbf{P}(A \mid H_i)$, apskaičiuotomis prieš įvykį A.

Vėl nagrinėsime hipotezių tikimybių perskaičiavimo uždavinį. Imsime urną su trimis rutuliais. Sakykime, A yra įvykis, kad iš urnos atsitiktinai ištrauktas rutulys yra baltas. Rasime įvykio A tikimybes, kai teisingos hipotezės H_0, H_1, H_2, H_3:

$$\mathbf{P}(A \mid H_0)=0,\ \mathbf{P}(A \mid H_1)=\frac{1}{3},$$

$$\mathbf{P}(A \mid H_2)=\frac{2}{3},\ \mathbf{P}(A \mid H_3)=1.$$

Kadangi visos hipotezės yra vienodai galimos, tai

$$\mathbf{P}(H_0)=\frac{1}{4},\ \mathbf{P}(H_1)=\frac{1}{4},\ \mathbf{P}(H_2)=\frac{1}{4},\ \mathbf{P}(H_3)=\frac{1}{4}.$$

Remiantis Bejeso formule,

$$\mathbf{P}(H_0 \mid A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot 0}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=0,$$

$$\mathbf{P}(H_1 \mid A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=\frac{1}{6},$$

$$\mathbf{P}(H_2 \mid A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=\frac{1}{3},$$

$$\mathbf{P}(H_3 \mid A)=\frac{\frac{1}{4}\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot 1}=\frac{1}{2}.$$

Vadinasi, kol iš urnos neištraukėme rutulio, nebuvo jokio pagrindo kurią nors hipotezę laikyti patikimesne, todėl kiekvienos hipotezės tikimybę laikėme lygia $\frac{1}{4}$. Po to, kai ištraukėme baltą rutulį, perskaičiavome hi-

potezių tikimybes ir jau laikome, kad tikimybės, jog urnoje buvo 0, 1, 2, 3 balti rutuliai, atitinkamai lygios $0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$.

1 pavyzdys. Detalių partiją gamino trys darbininkai: pirmasis pagamino 25%, antrasis – 35% ir trečiasis – 40% visų detalių. Pirmojo darbininko pagamintoje produkcijoje yra 5%, antrojo – 4% ir trečiojo – 2% broko. Atsitiktinai patikrinta detalė buvo brokuotina. Rasime tikimybę, kad ją pagamino antrasis darbininkas.

Sakykime, H_1, H_2, H_3 yra hipotezės, kad atsitiktinai paimta detalė yra pagaminta atitinkamai pirmojo, antrojo ir trečiojo darbininkų. Kadangi pirmasis darbininkas pagamino 25%, antrasis – 35% ir trečiasis – 40% visų detalių, tai

$$\mathbf{P}(H_1)=\frac{25}{100}, \quad \mathbf{P}(H_2)=\frac{35}{100}, \quad \mathbf{P}(H_3)=\frac{40}{100}.$$

Sakykime, A yra įvykis, kad atsitiktinai patikrinta detalė yra brokas. Įvykio A tikimybės, kai yra teisingos hipotezės H_1, H_2 ir H_3, duotos sąlygoje, būtent:

$$\mathbf{P}(A \mid H_1)=\frac{5}{100}, \quad \mathbf{P}(A \mid H_2)=\frac{4}{100}, \quad \mathbf{P}(A \mid H_3)=\frac{2}{100}.$$

Remiantis Bejeso formule,

$$\mathbf{P}(H_2 \mid A)=\frac{\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A \mid H_2)}{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A \mid H_1)+\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A \mid H_2)+\mathbf{P}(H_3)\mathbf{P}(A \mid H_3)}=$$

$$=\frac{\frac{35}{100}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{25}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{4}{100}+\frac{40}{100}\cdot\frac{2}{100}}=\frac{35\cdot 4}{25\cdot 5+35\cdot 4+40\cdot 2}=\frac{28}{69}.$$

Pratimai

18. Du automatai gamina to paties pavadinimo gaminius. Pirmojo automato našumas yra du kartus didesnis negu antrojo. Pirmojo automato produkcijoje yra 60% pirmos rūšies gaminių, o antrojo – 84%. Atsitiktinai paimtas gaminys buvo pirmos rūšies. Raskite tikimybę, kad jį pagamino pirmasis automatas.

19. Žinoma, kad 96% išleidžiamos produkcijos yra standartinė. Supaprastintai kontroliuojant, standartinis gaminys yra pripažįstamas geru su tikimybe 0,98, o nestandartinis – su tikimybe 0,05. Raskite tikimybę, kad gaminys yra standartinis, jeigu, taip kontroliuojant, jis buvo pripažintas geru.

20. Prietaisas, sudarytas iš dviejų mazgų, veikia, kai abu mazgai nesugedę. Pirmojo mazgo patikimumas (tikimybė, kad jis nesuges per laikotarpį t) yra P_1, o antrojo – P_2. Prietaisas buvo bandomas laikotarpį t ir sugedo. Raskite tikimybę, kad sugedo tik pirmasis mazgas, o antrasis veikia.

21. Urnoje yra keturi rutuliai, o visos hipotezės apie baltų rutulių skaičių urnoje yra vienodai galimos. Atsitiktinai ištrauktas iš urnos rutulys buvo baltas. Raskite tikimybę, kad antrasis ištrauktas rutulys irgi bus baltas.

22. Urnoje yra n rutulių, o visos hipotezės apie baltų rutulių skaičių urnoje yra vienodai galimos. Atsitiktinai ištrauktas iš urnos rutulys buvo baltas. Raskite tikimybę, kad antrasis ištrauktas rutulys irgi bus baltas.

§ 30. NEPRIKLAUSOMŲ BANDYMŲ SERIJOS. BERNULIO FORMULĖ

Iki šiol nagrinėjome atsitiktinius įvykius, susijusius su pavieniais bandymais. Tačiau praktikoje ir pačioje tikimybių teorijoje svarbiau nagrinėti vienodų tarpusavyje nepriklausomų bandymų serijas. Tokių serijų pavyzdžiai yra monetos mėtymas, šaudymas į taikinį, gaminio kontrolei parinkimas, jeigu visi tie bandymai yra daug kartų kartojami tomis pačiomis sąlygomis. Dabar suformuluosime uždavinį.

Sakykime, atlikus kokį nors bandymą, įvykis A įvyksta su tikimybe p. Rasime tikimybę $\mathbf{P}_n(k)$, kad, n kartų pakartojus bandymą, įvykis A įvyks k kartų. Ši tikimybė randama pagal Bernulio formulę.

Iš pradžių išvesime Bernulio formulę atskiru atveju, kai $n=4$ ir $k=2$, t.y. nagrinėsime keturių bandymų seriją, kai, atlikus kiekvieną bandymą, įvykis A įvyksta su tikimybe p. Rasime tikimybę $\mathbf{P}_4(2)$, kad, atlikus keturis bandymus, įvykis A įvyks du kartus.

Sakykime, A_1, A_2, A_3 ir A_4 yra įvykiai: A įvyko, atlikus atitinkamai pirmąjį, antrąjį, trečiąjį ir ketvirtąjį bandymus. Tada įvykis, kad A įvyko du kartus, yra tų nesutaikomų įvykių sąjunga:

$A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4$ (A įvyko, atlikus 1-ąjį ir 2-ąjį bandymus),
$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4$ (A įvyko, atlikus 1-ąjį ir 3-ąjį bandymus),
$A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4$ (A įvyko, atlikus 1-ąjį ir 4-ąjį bandymus),
$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \bar{A}_4$ (A įvyko, atlikus 2-ąjį ir 3-ąjį bandymus),
$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cap A_4$ (A įvyko, atlikus 2-ąjį ir 4-ąjį bandymus),
$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3 \cap A_4$ (A įvyko, atlikus 3-ąjį ir 4-ąjį bandymus).

Iš viso yra C_4^2 įvykių, nes tiek yra būdų A įvykti du kartus, atlikus keturis bandymus. Remiantis daugybos teorema, kiekvieno to įvykio tikimybė yra $p^2(1-p)^2$, t.y. ta pati.

Remiantis nesutaikomų įvykių sudėties teorema,

$$\mathbf{P}_4(2) = C_4^2 p^2 (1-p)^2.$$

Bendruoju atveju Bernulio formulę įrodysime visiškai analogiškai.

Sakykime, A_i ($i=1, 2, \ldots, n$) yra įvykis, kad A įvyks per i-ąjį bandymą. Tada įvykis, kad A įvyks k kartų, bus šių nesutaikomų įvykių sąjunga:

$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap \bar{A}_{k+1} \ldots \cap \bar{A}_n$ (A įvyko per pirmuosius k bandymų),
. . . .
. . . .
. . . .
$\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \ldots \cap A_n$ (A įvyko per paskutiniuosius k bandymų).

Iš viso bus C_n^k įvykių, nes tiek yra būdų A įvykti k kartų per n bandymų. Remiantis daugybos teorema, kiekvieno to įvykio tikimybė yra

$$p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remdamiesi nesutaikomų įvykių sudėties teorema, gauname *Bernulio formulę*:

$$\mathbf{P}_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \qquad (1)$$

1 pavyzdys. Į taikinį šaunama penkis kartus; tikimybė, kad bent vieną kartą bus pataikyta, lygi 0,8. Rasime tikimybę, jog į taikinį bus pataikyta tris kartus.

Įrašę Bernulio formulėje $n=5$, $k=3$, $p=0{,}8$, gausime

$$\mathbf{P}_5(3) = C_5^3\, 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}2048 \approx 0{,}2.$$

2 pavyzdys. Prietaise yra 4 lempos. Tikimybė, kad per metus kuri nors lempa suges, lygi $\frac{1}{6}$. Rasime tikimybę, jog per vienerius metus reikės pakeisti ne mažiau kaip pusę lempų.

Remdamiesi Bernulio formule, randame tikimybes, kad per vienerius metus suges dvi lempos: $C_4^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$; trys lempos: $C_4^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{5}{6}$; keturios lempos: $C_4^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^0$.

Remiantis nesutaikomų įvykių sudėties teorema, ieškomoji tikimybė

$$C_4^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + C_4^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{5}{6} + C_4^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 =$$

$$= \frac{150+20+1}{6^4} = \frac{171}{1296} = \frac{19}{144} \approx 0{,}13.$$

Pažymėkime $1-p=q$ ir Bernulio formulę užrašykime šitaip:

$$\mathbf{P}_n(k) = C_n^k q^{n-k} p^k.$$

Nagrinėsime daugianarį $(q+px)^n$ ir, remdamiesi Niutono formule, užrašysime jį x laipsnio rodiklių didėjimo tvarka:

$$(q+px)^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k q^{n-k} p^k)\, x^k. \qquad (2)$$

Iš pastarosios tapatybės išplaukia, kad tikimybės $\mathbf{P}_n(k) = C_n^k q^{n-k} p^k$ $(k=0,1, \ldots, n)$ yra daugianario $(q+px)^n$ koeficientai. Todėl daugianarį $(q+px)^n$ vadinsime *daugianariu, generuojančiu* tikimybes, kad, atlikus n nepriklausomų bandymų, A įvyks k kartų.

Jeigu reikia rasti visas tikimybes $\mathbf{P}_n(k)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$, tai generuojantį daugianarį patogu užrašyti pagal Niutono formulę; jo koeficientai ir bus ieškomosios tikimybės.

Kartais reikia rasti patikimiausią įvykių A skaičių, atlikus n nepriklausomų bandymų seriją. Kitaip tariant, reikia rasti tokias k reikšmes, kad skaičius $C_n^k q^{n-k} p^k$ (kai n pastovus) būtų didžiausias. Remiantis (2) formule, tas uždavinys yra lygiavertis šitokiam uždaviniui: rasti didžiausią generuojančio daugianario $(q+px)^n$ koeficientą. Jau žinome (žr. § 27, 7 pavyzdį), kaip randamas didžiausias tokio pavidalo daugianario koeficientas.

3 pavyzdys. Keturi skaičiavimo įrenginio elementai veikia nepriklausomai vienas nuo kito. Tikimybė, kad bet kuris elementas nesuges per laikotarpį t, lygi $\frac{3}{4}$. Rasime tikimybę, kad per laikotarpį t:

a) suges visi elementai;
b) veiks tik vienas elementas;
c) veiks du elementai;
d) veiks trys elementai;
e) veiks visi keturi elementai.

Tam tikrą laiko tarpą t stebime vieną elementą. Sakykime, A yra įvykis, kad per tą laikotarpį stebimas elementas nesugenda. Įvykio A tikimybė yra $p=\frac{3}{4}$; tada priešingo įvykio $\bar{A}$ tikimybė $q=\frac{1}{4}$. Įrenginyje yra keturi elementai, taigi bandymas kartojamas keturis kartus, t.y. $n=4$.

Sudarysime generuojantį daugianarį $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4$ ir užrašysime jį pagal Niutono formulę:

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x\right)^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4+4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3\cdot\frac{3}{4}x+$$
$$+\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2x^2+4\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3x^3+\left(\frac{3}{4}\right)^4x^4.$$

Daugianario koeficientai bus ieškomosios tikimybės:

a) tikimybė, kad suges visi elementai, lygi koeficientui prie x^0, t.y.

$$\mathbf{P}_4(0)=\left(\frac{1}{4}\right)^4\approx 0{,}004,$$

b) tikimybė, kad veiks vienas elementas, lygi koeficientui prie x, t.y.

$$\mathbf{P}_4(1)=4\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{3}{4}\approx 0{,}048,$$

c) tikimybė, kad veiks du elementai, lygi koeficientui prie x^2, t.y.

$$\mathbf{P}_4(2)=\frac{4\cdot 3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\approx 0{,}212,$$

d) tikimybė, kad veiks trys elementai, lygi koeficientui prie x^3, t.y.

$$\mathbf{P}_4(3)=4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3\approx 0{,}422,$$

e) tikimybė, kad veiks visi keturi elementai, lygi koeficientui prie x^4, t.y.

$$\mathbf{P}_4(4)=\left(\frac{3}{4}\right)^4\approx 0{,}314.$$

4 pavyzdys. Atlikus vieną bandymą, įvykio A tikimybė lygi $\frac{2}{3}$. Bandymas kartojamas 10 kartų. Kuris rezultatas patikimiausias? Rasime to rezultato tikimybę.

Šiuo atveju generuojantis daugianaris yra $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)^{10}$.

Nustatėme (žr. § 27, 7 pavyzdį), kad didžiausias to daugianario koeficientas yra prie x^7, t.y. $C_{10}^7\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7$. Vadinasi, įpatikimiausias rezultatas yra šitoks: įvykis A įvyksta 7 kartus; jo tikimybė

$$\mathbf{P}_{10}(7)=C_{10}^7\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^7\approx 0{,}26.$$

Kiekvieno kito iš 10 rezultatų tikimybė yra mažesnė.

Pratimai

1. Raskite tikimybę, kad, metus monetą 10 kartų, herbas atvirs du kartus.

2. Tikimybė, kad gamykla per parą neviršys dujų vartojimo normos, lygi 0,9. Raskite tikimybę, kad per savaitę gamykla viršys dujų vartojimo normą tris kartus.

3. Raskite tikimybę, kad, metus monetą 5 kartus, herbas atvirs ne mažiau kaip du kartus.

4. Vienos partijos išlošimo ir pralošimo tikimybės yra vienodos ir lygios 0,5. Kuris įvykis labiau tikėtinas: a) išlošti tris partijas iš keturių ar penkias iš aštuonių; b) išlošti ne mažiau kaip tris partijas iš keturių ar ne mažiau kaip penkias iš aštuonių?

5. Atlikus vieną bandymą, įvykis A įvyksta su tikimybe $\frac{2}{3}$. Raskite tikimybę, kad, penkis kartus pakartojus bandymą, įvykis A įvyks 5, 4, 2, 1, 0 kartų.

6. Į taikinį šaunama 100 kartų; tikimybė, jog bus pataikyta vienu šūviu, lygi $\frac{5}{6}$. Raskite tikėtiniausią pataikymų skaičių.

7. Darbininkas prižiūri 50 staklių. Tikimybė, kad per pamainą reikės stakles reguliuoti, lygi $\frac{1}{3}$. Kuris įvykis labiau tikėtinas: a) reikės reguliuoti 17 staklių, b) reikės reguliuoti 16 staklių?

8. Prietaise yra šešios lempos. Padidėjus įtampai grandinėje, viena bet kuri lempa sugenda nepriklausomai nuo kitų su tikimybe 0,3. Perdegus trims ir mažiau lempų, prietaisas veikia. Perdegus keturioms lempoms, prietaisas sugenda su tikimybe 0,3, perdegus penkioms lempoms — su tikimybe 0,7, perdegus šešioms lempoms — su tikimybe 1. Raskite tikimybę, kad, padidėjus įtampai, prietaisas suges.

§ 31. ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

1. Atsitiktinio dydžio pasiskirstymo dėsnis. *Atsitiktiniu dydžiu*, susijusiu su tam tikru bandymu, vadinsime bet kokį dydį, kuris, atlikus tą bandymą, įgyja konkrečią skaitinę reikšmę. Ankstesniuosiuose paragrafuose jau susipažinome su įvairiais atsitiktiniais dydžiais. Atliekant bandymus su lošimo kauliuku, mus domino atvirtusių akučių skaičius, t.y. dydis, kuris atsitiktinai įgydavo vieną kurią nors reikšmę: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Nagrinėdami penkis šūvius į taikinį, susidūrėme su atsitiktiniu dydžiu (pataikymų į taikinį skaičiumi), kuris galėjo įgyti vieną bet kurią reikšmę: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Kiti atsitiktinių dydžių pavyzdžiai:

a) tam tikros partijos išbrokuotų gaminių skaičius,

b) iš vienos karvės per metus primelžto pieno kiekis,

c) skaičius Saulės dėmių, kurių plotas yra didesnis už tam tikrą reikšmę ir kurias užregistravo astronomai Saulės diske per dieną,

d) alyvos žiedo žiedlapių skaičius,

e) per parą mieste įvykusių autotransporto avarijų skaičius.

Norint pilnutinai apibūdinti atsitiktinį dydį, pirmiausia būtina žinoti jo įgyjamas reikšmes. Tačiau to, žinoma, nepakanka: dar reikia žinoti tikimybę, kad atsitiktinis dydis įgis tą ar kitą reikšmę.

Atsitiktinį dydį žymėsime raide X, jo reikšmes – raidėmis x_1, x_2, ..., x_n, o atitinkamas tų reikšmių tikimybes – raidėmis $p_1, p_2, ..., p_n$.

Jeigu žinomos visos atsitiktinio dydžio X reikšmės x_1, x_2, ..., x_n ir tų reikšmių tikimybės p_1, p_2, ..., p_n, tai sakoma, kad yra duotas atsitiktinio dydžio X *pasiskirstymo dėsnis*, arba tiesiog dydžio X *pasiskirstymas*.

Pasiskirstymo dėsnį patogu užrašyti lentele:

x_1	x_2	x_3	...	x_k	...	x_n
p_1	p_2	p_3	...	p_k	...	p_n

(1)

Pirmoje lentelės eilutėje surašome visas atsitiktinio dydžio reikšmes, po jomis antroje eilutėje – atitinkamas tikimybes.

Nagrinėsime n atsitiktinių įvykių:

A_1 – atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę x_1,

A_2 – atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę x_2,

. . . .

A_n – atsitiktinis dydis X įgijo reikšmę x_n.

Įvykiai $A_1, A_2, ..., A_n$ yra nesutaikomi, nes, vieną kartą atlikus bandymą, atsitiktinis dydis gali įgyti tik vieną bet kurią reikšmę $x_1, x_2, ..., x_n$. Akivaizdu, kad įvykių A_1, A_2, ..., A_n sąjunga yra būtinas įvykis, t.y.

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = U,$$

nes vieną iš reikšmių x_1, x_2, ..., x_n atsitiktinis dydis būtinai įgis.

Todėl, remiantis nesutaikomų įvykių sudėties teorema,

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathbf{P}(U) = 1,$$

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \ldots + \mathbf{P}(A_n) = 1,$$

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

arba trumpiau

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \tag{2}$$

t.y. visų (1) lentelės antros eilutės skaičių suma lygi vienetui.

1 pavyzdys. Sakykime, atsitiktinis dydis X yra skaičius akučių, atvirtusių vieną kartą metus lošimo kauliuką. Rasime pasiskirstymo dėsnį.

Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1=1$, $x_2=2$, ..., $x_6=6$ su tikimybėmis $p_1=p_2=\dots=p_6=\frac{1}{6}$. Todėl pasiskirstymo dėsnis yra

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2 pavyzdys. Į taikinį šaunama tris kartus ir tikimybė, jog bus pataikyta vienu bet kuriuo šūviu, lygi 0,8. Rasime atsitiktinio dydžio X – taiklių šūvių skaičiaus – pasiskirstymo dėsnį.

Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$, $x_4=3$.

Paprasčiausiu būdu ieškodami atitinkamų tikimybių, sudarysime generuojantį daugianarį $(0{,}2+0{,}8x)^3$ ir užrašysime jo dėstinį

$$0{,}2^3+3\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8\,x+3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^2\,x^2+0{,}8^3\,x^3.$$

Kaip žinome (žr. § 30), koeficientas prie x^k ($k=0, 1, 2, 3$) yra tikimybė, jog į taikinį bus pataikyta k kartų, t.y. tikimybė, kad atsitiktinis dydis X įgis reikšmę k.

Taigi

$$p_1=0{,}2^3=0{,}008,$$

$$p_2=3\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8=0{,}096,$$

$$p_3=3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^2=0{,}384,$$

$$p_4=0{,}8^3=0{,}512.$$

Vadinasi, atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo dėsnis yra

0	1	2	3
0,008	0,096	0,384	0,512

3 pavyzdys. Nagrinėsime atsitiktinį dydį X – įvykių A skaičių, atlikus n nepriklausomų bandymų. Rasime atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo dėsnį, jeigu įvykio A tikimybė, atlikus vieną bandymą, lygi p.

Akivaizdu, kad atsitiktinis dydis X gali įgyti vieną iš reikšmių

$$0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ k,\ \dots,\ n.$$

Remiantis Bernulio formule, tikimybė, jog atsitiktinis dydis X įgis reikšmę k, yra

$$\mathbf{P}(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad q=1-p.$$

Vadinasi, atsitiktinio dydžio X pasiskirstymas yra

0	1	...	k	...	n	
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$	(3)

Pasiskirstymą, aprašytą (3) lentele, vadinsime *Bernulio*, arba *binominiu pasiskirstymu*; tada (2) sąlyga virsta šitokia:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=1. \qquad (4)$$

Norint įrodyti tą lygybę, pakanka 30 paragrafo (2) tapatybėje

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k$$

imti $x=1$.

J. Bernulio pasiskirstymas pilnutinai nusakomas dviem parametrais: visų bandymų skaičiumi n ir įvykio, atlikus kiekvieną atskirą bandymą, tikimybe p.

Pratimai

1. Ar gali būti kokio nors atsitiktinio dydžio pasiskirstymas aprašytas lentele:

a)

0	$\frac{1}{2}$	10	π
0,1	0,5	0,1	0,3

; b)

1	2	3	4
0	0,4	0,2	0,3

?

2. Ar atsitiktiniai dydžiai, išnagrinėti 1 ir 2 pavyzdžiuose, pasiskirstę pagal binominį dėsnį?

3. Moneta metama tris kartus. Nagrinėjamas atsitiktinis dydis X – herbo atvirtimų skaičius. Raskite to atsitiktinio dydžio pasiskirstymą.

4. Atsitiktinis dydis X yra, vieną kartą metus lošimo kauliuką, atvirtusių akučių skaičiaus kvadratas. Raskite jo pasiskirstymo dėsnį.

5. Sakykime, atsitiktinis dydis X yra įvykio A dažnis, atlikus tris nepriklausomus bandymus. Raskite jo pasiskirstymo dėsnį, jeigu įvykio A tikimybė, atlikus atskirą bandymą, lygi 0,4.

2. Atsitiktinio dydžio vidurkis (matematinė viltis).

Apibrėžimas. Atsitiktinio dydžio *vidurkiu* (*matematine viltimi*) vadinsime visų atsitiktinio dydžio reikšmių ir atitinkamų tikimybių sandaugų sumą.

Atsitiktinio dydžio X vidurkį žymėsime $\mathbf{M}X$. Jeigu atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ atitinkamai su tikimybėmis $p_1, p_2, \ldots, p_n$, tai, remiantis apibrėžimu,

$$\mathbf{M}\,X=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \qquad (1)$$

Vidurkis yra svarbiausia atsitiktinio dydžio skaitinė charakteristika. Dažnai vidurkis vadinamas atsitiktinio dydžio vidurkine reikšme, nes ji yra „vidurkinis skaičius", apie kurį grupuojasi visos atsitiktinio dydžio reikšmės.

1 pavyzdys. Metamas lošimo kauliukas. Rasime atvirtusių akučių skaičiaus vidurkį.

Atsitiktinio dydžio X pasiskirstymą radome ankstesnio skirsnio 1 pavyzdyje. Remiantis (1) formule,

$$\mathbf{M}\,X=\sum_{k=1}^{6} x_k p_k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k=\frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2}=3{,}5.$$

2 pavyzdys. Atliekama n nepriklausomų bandymų. Per kiekvieną bandymą gali įvykti įvykis A su tikimybe p. Rasime įvykių A skaičiaus vidurkį, atlikus n minėtų bandymų.

Tikimybė, kad atsitiktinis dydis įgis reikšmę k, lygi $C_n^k q^{n-k} p^k$. Todėl, remiantis (1) formule,

$$\mathbf{M}\,X=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k.$$

Supaprastinsime gautąjį reiškinį, pasinaudoję 30 paragrafo (2) tapatybe

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k.$$

Rasime abiejų tos tapatybės pusių išvestines x atžvilgiu:

$$n(q+px)^{n-1}p=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k x^{k-1}.$$

Iš čia, kai $x=1$, gausime

$$np=\sum_{k=0}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k,$$

nes $p+q=1$.

Taigi

$$\mathbf{M}\,X = np. \tag{2}$$

Vadinasi, įvykių A skaičiaus, kai atliekama n nepriklausomų bandymų ir per vieną bet kurį bandymą A įvyksta su tikimybe p, vidurkis yra lygus bandymų skaičiaus n ir tikimybės p sandaugai.

Kitaip tariant, atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal binominį dėsnį su parametrais n ir p, vidurkis lygus sandaugai np.

3 pavyzdys. Sakykime, 10 000 gaminių partijos kiekvienas gaminys gali būti išbrokuotas su tikimybe 0,005. Rasime tos partijos defektinių gaminių skaičiaus vidurkį.

Defektinių gaminių skaičius yra atsitiktinis dydis X, pasiskirstęs pagal binominį dėsnį. Todėl, remiantis (2) formule, $\mathbf{M}X = 10\,000 \cdot 0{,}005 = 50$.

4 pavyzdys. Sakykime, X yra skaičius akučių, atvirtusių vieną kartą metus lošimo kauliuką, o Y – atsitiktinio dydžio X nuokrypio nuo jo vidurkio kvadratas. Rasime Y vidurkį.

Atsitiktinio dydžio X vidurkį radome 1 pavyzdyje: $\mathbf{M}X = 3{,}5$.

Atsitiktinio dydžio X nuokrypio nuo jo vidurkio kvadratas yra atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes:

$$y_1 = (1-3{,}5)^2,\quad y_2 = (2-3{,}5)^2,\quad y_3 = (3-3{,}5)^2,$$

$$y_4 = (4-3{,}5)^2,\quad y_5 = (5-3{,}5)^2,\quad y_6 = (6-3{,}5)^2.$$

Akivaizdu, kad kiekvienos reikšmės tikimybė yra $\frac{1}{6}$. Todėl

$$\mathbf{M}\,Y = \sum_{k=1}^{6} y_k p_k = \sum_{k=1}^{6} (k-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{2{,}5^2 + 1{,}5^2 + 0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1{,}5^2 + 2{,}5^2}{6} = \frac{35}{12}.$$

3. Atsitiktinio dydžio dispersija. Kita svarbi atsitiktinio dydžio X skaitinė charakteristika yra jo dispersija. Dydžio X dispersiją žymėsime $\mathbf{D}X$ ir apibrėšime šitaip.

Apibrėžimas. *Atsitiktinio dydžio X dispersija* vadinsime atsitiktinio dydžio X nuokrypio nuo jo vidurkio kvadrato vidurkį, t.y.

$$\mathbf{D}\,X = \mathbf{M}\,(X - \mathbf{M}\,X)^2.$$

Atsitiktinio dydžio X – skaičiaus akučių, atvirtusių vieną kartą metus lošimo kauliuką, – nuokrypio nuo jo vidurkio kvadrato vidurkį apskaičiavome 2 skirsnio 4 pavyzdyje, t.y. radome X dispersiją. Taigi, remiantis 4 pavyzdžiu, $\mathbf{D}\,X = \frac{35}{12}$ (X yra skaičius akučių, atvirtusių vieną kartą metus lošimo kauliuką). Sakykime, atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ atitinkamai su tikimybėmis $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Tada nuokrypio nuo vidurkio kvadratas yra atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes

$$(x_1 - \mathbf{M}\,X)^2,\ (x_2 - \mathbf{M}\,X)^2,\ \ldots,\ (x_k - \mathbf{M}\,X)^2,\ \ldots,\ (x_n - \mathbf{M}\,X)^2$$

atitinkamai su tikimybėmis $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$. Todėl taip pasiskirsčiusio atsitiktinio dydžio vidurkis, t.y. X dispersija yra

$$\mathbf{D}\,X=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mathbf{M}\,X)^2 p_k. \qquad (1)$$

Atsitiktinio dydžio dispersija apibūdina atsitiktinio dydžio reikšmių išsisklaidymą apie jo vidurkį. Pats žodis „dispersija" reiškia „išsisklaidymą, išsibarstymą".

1 pavyzdys. Atsitiktinių dydžių X ir Y pasiskirstymo dėsniai yra atitinkamai:

-1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

,

-2	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

.

Rasime $\mathbf{D}X$ ir $\mathbf{D}Y$.

Iš pradžių apskaičiuojame vidurkius:

$$\mathbf{M}\,X=(-1)\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=0,\ \mathbf{M}\,Y=(-2)\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=0.$$

Dabar, remdamiesi (1) formule, randame dispersijas:

$$\mathbf{D}\,X=1\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{2}=1,\ \mathbf{D}\,Y=4\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=4.$$

2 pavyzdys. Atsitiktinių dydžių X ir Y pasiskirstymo dėsniai

-2	-1	1	2
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

,

-2	-1	1	2
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

.

Rasime $\mathbf{D}X$ ir $\mathbf{D}Y$.

Apskaičiuojame vidurkius:

$$\mathbf{M}\,X=(-2)\ \frac{1}{6}+(-1)\ \frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{6}=0,$$

$$\mathbf{M}\,Y=(-2)\ \frac{1}{4}+(-1)\ \frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=0.$$

Remdamiesi (1) formule, randame dispersijas:

$$\mathbf{D}\,X=4\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=2,$$

$$\mathbf{D}\,Y=4\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{4}=2{,}5.$$

Šiame pavyzdyje atsitiktiniai dydžiai X ir Y įgyja tas pačias reikšmes, jų vidurkiai yra lygūs, bet atsitiktinio dydžio Y reikšmių išsisklaidymas yra didesnis, negu atsitiktinio dydžio X. Reikšmes ± 2, labiau nutolusias nuo vidurkio, atsitiktinis dydis Y įgyja su didesne tikimybe, negu atsitiktinis dydis X, o reikšmes ± 1, esančias arčiau vidurkio, Y įgyja su mažesne tikimybe, negu X. Būtent tą ir rodo nelygybė $\mathbf{D}X<\mathbf{D}Y$.

1 ir 2 pavyzdžio atsitiktinių dydžių dispersijas skaičiavome pagal (1) formulę. Tačiau patogiau dispersiją skaičiuoti pagal kitą formulę, kurią gausime iš (1):

$$\mathbf{D}X=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\mathbf{M}X)^2 p_k=\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2-2(\mathbf{M}X)x_k+(\mathbf{M}X)^2\right)p_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 p_k-2(\mathbf{M}X)\sum_{k=1}^{n}x_k p_k+(\mathbf{M}X)^2\sum_{k=1}^{n}p_k.$$

Kadangi

$$\sum_{k=1}^{n}p_k=1,\quad \sum_{k=1}^{n}x_k p_k=\mathbf{M}X,$$

tai

$$\mathbf{D}X=\sum_{k=1}^{n}x_k^2 p_k-(\mathbf{M}X)^2.$$

Likusi suma yra vidurkis atsitiktinio dydžio, pasiskirsčiusio pagal dėsnį, aprašytą lentele

x_1^2	x_2^2	...	x_k^2	...	x_n^2
p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

.

Tokį atsitiktinį dydį vadinsime atsitiktinio dydžio X kvadratu ir žymėsime X^2.

Vadinasi, dispersiją galime skaičiuoti pagal formulę

$$\mathbf{D}X=\mathbf{M}(X^2)-(\mathbf{M}X)^2; \qquad (2)$$

skaitome: atsitiktinio dydžio dispersija yra lygi to dydžio kvadrato vidurkio ir jo vidurkio kvadrato skirtumui.

3 pavyzdys. Rasime dispersiją atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal binominį dėsnį su parametrais n ir p.

Ankstesnio skirsnio 2 pavyzdyje įrodėme, kad $\mathbf{M}X=np$. Norėdami dispersiją rasti pagal (2) formulę, užrašysime atsitiktinio dydžio X^2 pasiskirstymo dėsnį:

0	1	...	k^2	...	n^2
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

Vadinasi, atsitiktinio dydžio X^2 vidurkis yra

$$\mathbf{M}(X^2)=\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Norėdami supaprastinti gautąją sumą, vėl nagrinėsime 30 paragrafo (2) tapatybę:

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k.$$

Rasime abiejų tos tapatybės pusių antrosios eilės išvestines x atžvilgiu:

$$n(n-1)(q+px)^{n-2}p^2=\sum_{k=1}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k k(k-1)x^{k-2}.$$

Paėmę toje tapatybėje $x=1$, gausime lygybę

$$n(n-1)p^2=\sum_{k=1}^{n} k(k-1) C_n^k q^{n-k} p^k$$

arba

$$n(n-1)p^2=\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k q^{n-k} p^k-\sum_{k=1}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k.$$

Kadangi $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k=\mathbf{M}X=np$, tai

$$\mathbf{M}(X^2)=\sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k q^{n-k} p^k=n(n-1)p^2+np=n^2p^2-np^2+np.$$

Galutinai

$$\mathbf{D}X=\mathbf{M}(X^2)-(\mathbf{M}X)^2=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p),$$

t.y.

$$\mathbf{D}X=npq. \tag{3}$$

6. Raskite MX ir DX atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal dėsnį

1	2	3
0,3	0,2	0,5

.

7. Raskite MX ir DX atsitiktinio dydžio X, pasiskirsčiusio pagal dėsnį

2	4	6	8	10
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$

.

8. Raskite MX ir DX atsitiktinio dydžio X, nagrinėto:
a) 3 pavyzdyje;
b) 5 pavyzdyje.

9. Raskite MX atsitiktinio dydžio X, nagrinėto 4 pavyzdyje.

10. Iš urnos, kurioje yra 2 balti ir 3 juodi rutuliai, atsitiktinai ištraukiami du rutuliai. Raskite MX ir DX, kai X – ištrauktų baltų rutulių skaičius.

11. 5000 gaminių partijoje atskiras gaminys yra defektinis su tikimybe 0,02. Raskite tos partijos defektinių gaminių skaičiaus vidurkį ir dispersiją.

12. 98% gamyklos išleidžiamų gaminių yra su kokybės ženklu. Raskite gaminių su kokybės ženklu skaičiaus vidurkį ir dispersiją 5000 gaminių partijoje.

13. Kiekviena iš 4 lempų yra defektinė su tikimybe $\frac{1}{3}$. Įsukus į patroną, defektinė lempa iš karto perdega, ir tada įsukama kita. Sakykime, X yra atsitiktinis dydis, reiškiantis įsuktų lempų skaičių. Raskite to dydžio pasiskirstymo dėsnį, vidurkį ir dispersiją.

14. Jeigu, metus tris kauliukus, ant visų atvirsta šešiukės, tai žaidėjas laimi 10 rublių. Jeigu šešiukės atvirsta tik ant dviejų kauliukų, tai žaidėjas laimi 1 rublį. Kiek turi kainuoti bilietas, kad žaidimas būtų pelningas?

15. Šaudyklos taikinys yra skritulio formos; jis padalytas į tris kongruenčius sektorius, sunumeruotus skaičiais 1, 2, 3. Taikinys sukasi, todėl šaulys neskiria sektorių ir šaudo aklai. Pataikęs į 1 sektorių, šaulys laimi rublį, į 2 sektorių – du rublius, į 3 sektorių – tris rublius. Norint iššauti vieną kartą, reikia sumokėti 1,5 rublio. Ar toks lošimas pelningas tam, kuris į taikinį pataiko su tikimybe: a) 0,7; b) 0,8; c) 0,75?

4. Čebyšovo nelygybė. Nagrinėsime atsitiktinio dydžio X nuokrypio nuo jo vidurkio modulį, t.y. atsitiktinį dydį $|X-\mathrm{M}X|$.

Tikimybę, kad atsitiktinis dydis $|X-\mathrm{M}X|$ įgis reikšmę, ne mažesnę už kurį nors teigiamą skaičių ε, žymėsime simboliu $\mathbf{P}(|X-\mathrm{M}X|\geqslant\varepsilon)$.

Teorema. *Bet kuris atsitiktinis dydis X ir bet kuris teigiamas skaičius ε tenkina nelygybę*

$$\mathbf{P}(|X-\mathrm{M}X|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathrm{D}X}{\varepsilon^2},$$

t.y. tikimybė, kad atsitiktinio dydžio X nuokrypio nuo vidurkio modulis bus ne mažesnis už bet kurį teigiamą skaičių ε, yra ne didesnė už X dispersijos ir ε^2 santykį.

Tai ir yra žymioji Čebyšovo nelygybė, kuria remiantis tikimybių teorijoje įrodoma daug svarbių teoremų.

Įrodymas. Sakykime, X yra bet koks atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal dėsnį

x_1	...	x_l	x_{l+1}	...	x_n
p_1	...	p_l	p_{l+1}	...	p_n

,

o ε – bet koks teigiamas skaičius. Tada visas atsitiktinio dydžio X reikšmes x_k $(k=1, 2, ..., n)$ galime suskirstyti į dvi aibes: pirmajai aibei priskirsime reikšmes x_k, tenkinančias nelygybę

$$|x_k - \mathbf{M}X| \geqslant \varepsilon; \tag{1}$$

kitas reikšmes, t.y. tenkinančias priešingą nelygybę

$$|x_k - \mathbf{M}X| < \varepsilon, \tag{2}$$

priskirsime antrajai aibei.

Viena iš tų aibių gali būti tuščia.

Apibrėžtumo dėlei galime laikyti, kad atsitiktinio dydžio reikšmės, sunumeruotos skaičiais nuo 1 iki l, tenkina (1) nelygybę, o kitos reikšmės, t.y. tenkinančios (2) nelygybę, sunumeruotos skaičiais nuo $l+1$ iki n.

Atsitiktinio dydžio X dispersijos

$$\mathbf{D}X = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathbf{M}X)^2 p_k$$

išraiškoje visi dėmenys yra neneigiami. Atmetę paskutiniuosius $n-l$ dėmenų, tą sumą tik sumažinsime, t.y.

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mathbf{M}X)^2 p_k \geqslant \sum_{k=1}^{l} (x_k - \mathbf{M}X)^2 p_k.$$

Dabar po sumos ženklu liko tik tos reikšmės x_k, kurių numeriai $k \leqslant l$; visos jos tenkina nelygybę $|x_k - \mathbf{M}X| \geqslant \varepsilon$, taigi ir ekvivalenčią jai nelygybę $(x_k - \mathbf{M}X)^2 \geqslant \varepsilon^2$. Todėl

$$\sum_{k=1}^{l} (x_k - \mathbf{M}X)^2 p_k \geqslant \sum_{k=1}^{l} \varepsilon^2 p_k = \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{l} p_k.$$

Paskutinioji suma $\sum_{k=1}^{l} p_k$ yra tikimybė, kad atsitiktinis dydis X įgis vieną bet kurią reikšmę $x_2, ..., x_l$, t.y. $\sum_{k=1}^{l} p_k$ yra tikimybė, kad X įgis reikš-

mę, tenkinančią nelygybę $|x_k - \mathbf{M}X| \geqslant \varepsilon$. Tą tikimybę sutarėme žymėti $\mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| \geqslant \varepsilon)$, todėl $\sum_{k=1}^{l} p_k = \mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| \geqslant \varepsilon)$. Vadinasi, dispersija tenkina nelygybę

$$\mathbf{D}X \geqslant \varepsilon^2 \mathbf{P}(|X - \mathbf{M}X| \geqslant \varepsilon),$$

iš kurios išplaukia Čebyšovo nelygybė.

5. Didžiųjų skaičių dėsnis. Vėl nagrinėsime atsitiktinį dydį X – skaičių įvykių A, įvykusių atlikus n nepriklausomų bandymų, kai per kiekvieną bandymą įvykis A įvyksta su tikimybe p. Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes k $(k=0, 1, \ldots, n)$. Jau anksčiau (žr. 2 ir 3 skirsnius) apskaičiavome X vidurkį ir dispersiją $\mathbf{M}X = np$, $\mathbf{D}X = npq$.

Imkime bet kokį teigiamą skaičių ε_1 ir atsitiktiniam dydžiui X užrašykime Čebyšovo nelygybę:

$$\mathbf{P}(|k - np| \geqslant \varepsilon_1) \leqslant \frac{npq}{\varepsilon_1^2}.$$

Akivaizdu, kad nelygybė $|k - np| \geqslant \varepsilon_1$ yra ekvivalenti nelygybei $\left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon_1}{n}$, todėl

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \frac{\varepsilon_1}{n}\right) \leqslant \frac{npq}{\varepsilon_1^2}.$$

Kadangi ε_1 yra bet koks teigiamas skaičius, tai $\frac{\varepsilon_1}{n}$ – taip pat bet koks teigiamas skaičius. Pažymėkime $\frac{\varepsilon_1}{n} = \varepsilon$. Tada tikimybė, kad atsitiktinio įvykio A dažnio per n nepriklausomų bandymų ir įvykio A tikimybės p per atskirą bandymą skirtumo modulis bus ne mažesnis už bet kurį teigiamą skaičių ε, tenkina nelygybę

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Kadangi $\frac{pq}{n\varepsilon^2} \to 0$, kai $n \to \infty$, tai iš gautojo įverčio išplaukia,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0.$$

Tą rezultatą pirmą kartą gavo J. Bernulis, todėl jis ir vadinamas *Bernulio teorema* arba *didžiųjų skaičių dėsnio* Bernulio forma.

Didžiųjų skaičių dėsnis tvirtina: tikimybė, kad įvykio A dažnio per n nepriklausomų bandymų ir tikimybės p, kad įvykis A įvyks per atskirą bandymą, skirtumo modulis yra ne mažesnis už bet kokį teigiamą skaičių ε ir artėja prie nulio, kai n neaprėžtai didėja.

Kitaip tariant, kad ir koks mažas būtų ε, kai n pakankamai didelis, nelygybės $\left|\frac{k}{n} - p\right| \geqslant \varepsilon$ tikimybė yra kaip norima artima nuliui, taigi priešingos nelygybės $\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon$ tikimybė yra kaip norima artima vienetui.

Vadinasi, su tikimybe, kaip norima artima vienetui, galima tvirtinti, jog įvykio dažnis, kai nepriklausomų bandymų skaičius yra pakankamai didelis, kiek norima mažai skiriasi nuo to įvykio tikimybės per atskirą bandymą.

Taigi iš didžiųjų skaičių dėsnio Bernulio formos išplaukia įvykio dažnio, kai atliekama n nepriklausomų bandymų ir per kiekvieną iš jų įvykis įvyksta su ta pačia tikimybe, statistinio stabilumo savybė. Vadinasi, jeigu įvykio tikimybė nėra žinoma, tai, remiantis didžiųjų skaičių dėsniu, vietoj įvykio tikimybės galima imti jo dažnį, apskaičiuotą atlikus pakankamai daug bandymų. Pavyzdžiui, berniuko gimimo dažnis, kai gimimų skaičius pakankamai didelis, yra artimas skaičiui 0,511, ir būtent tas skaičius yra laikomas berniuko gimimo tikimybe, pagal kurią prognozuojamas demografinis procesas.

VIII SKYRIUS

Diferencialinės lygtys

§ 32. DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ PAVYZDŽIAI

1. Bakterijų dauginimasis. Atliekant bandymus su bakterijomis, nustatyta, kad bakterijų dauginimosi greitis yra proporcingas jų kiekiui, jeigu tik, žinoma, jos turi pakankamai maisto.

Kadangi bakterijos labai mažos, o jų kiekis didelis, tai galima laikyti, kad bakterijų masė, bėgant laikui, kinta tolydžiai. Tada bakterijų masės kitimo greitis vadinamas dauginimosi greičiu.

Jeigu $x(t)$ pažymėsime visų bakterijų masę laiko momentu t, tai $\frac{dx}{dt}$ bus tų bakterijų dauginimosi greitis. Kadangi dauginimosi greitis $\frac{dx}{dt}$ yra proporcingas bakterijų kiekiui, tai egzistuoja tokia konstanta k, kad

$$\frac{dx}{dt}=kx. \tag{1}$$

Remiantis sąlyga, $x(t)$ ir $x'(t)$ yra neneigiami, todėl koeficientas k taip pat neneigiamas. Suprantama, įdomus tik tas atvejis, kai $k>0$. Kai $k=0$, jokio dauginimosi nėra.

(1) lygtis yra paprasčiausias *diferencialinės lygties* pavyzdys. Ji vadinama diferencialine dauginimosi lygtimi. (1) lygties ieškomas nežinomasis yra funkcija $x=x(t)$, į lygtį įeinanti kartu su savo išvestine $x'(t)$.

Akivaizdu, kad bet kokia funkcija

$$x=Ce^{kt}, \tag{2}$$

kurioje C – konstanta, yra (1) lygties sprendinys. Iš tikrųjų

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(Ce^{kt})=C\frac{d}{dt}e^{kt}=Cke^{kt}=k(Ce^{kt})=kx.$$

34 paragrafe įrodysime, kad visi (1) lygties sprendiniai išreiškiami (2) formule. Todėl (2) funkciją, kurioje C – bet kokia konstanta, vadinsime (1) *lygties bendruoju sprendiniu.*

Pažiūrėsime, kaip diferencialinė lygtis (1) ir bendrasis jos sprendinys (2) naudojami tiriant dauginimosi procesą.

Akivaizdu, kad koeficientas k priklauso nuo bakterijų rūšies ir išorinių sąlygų.

Jeigu žinome koeficientą k ir bakterijų masę m_0 kuriuo nors laiko momentu t_0, tai, remdamiesi (2) formule, galime rasti bakterijų masę bet kuriuo laiko momentu t. Sakykime,

$$x(t_0)=m_0. \tag{3}$$

Tada $m_0=Ce^{kt_0}$, $C=m_0e^{-kt_0}$, taigi

$$x(t)=m_0e^{k(t-t_0)}. \tag{4}$$

(4) funkcija yra (1) lygties sprendinys; be to, ji tenkina (3) sąlygą, vadinamą *pradine sąlyga.*

Vadinasi, (1) lygtis turi be galo daug sprendinių, o duotoji pradinė sąlyga iš tos aibės išskiria vienintelį sprendinį.

Praktikoje dažnai pasitaiko šitokia situacija. Žinoma, kad kokios nors bakterijos tam tikromis sąlygomis dauginasi pagal dėsnį $x=x(t)$, tenkinantį (1) lygtį, tačiau koeficientas k nėra žinomas. Reikia rasti koeficientą k ir tos rūšies bakterijų dauginimosi duotomis sąlygomis dėsnį.

Tuo atveju (1) lygties bendrajame sprendinyje (2) yra dvi nežinomos konstantos C ir k.

Kaip ir anksčiau, iš (3) pradinės sąlygos radę konstantą C, turėsime

$$x(t)=m_0e^{k(t-t_0)}. \tag{5}$$

Norėdami rasti nežinomąjį k, apskaičiuosime bakterijų masę kuriuo nors laiko momentu $t_1>t_0$; sakykime, ta masė yra m_1, tada

$$m_1=m_0e^{k(t_1-t_0)}, \quad k(t_1-t_0)=\ln\frac{m_1}{m_0},$$

todėl

$$k=\frac{1}{t_1-t_0}\ln\frac{m_1}{m_0}=\frac{\ln m_1-\ln m_0}{t_1-t_0}.$$

Koeficiento k reikšmę įrašę į (5) formulę, gausime

$$x(t)=m_0e^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\ln\frac{m_1}{m_0}},$$

arba

$$x(t)=m_0\left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{\frac{t-t_0}{t_1-t_0}}.$$

2. Radioaktyvusis skilimas. Bandymais nustatyta, kad radioaktyviosios medžiagos skilimo greitis proporcingas medžiagos kiekiui.

Vadinasi, jeigu $x(t)$ reiškia medžiagos, dar nesuskilusios laiko momentu t, masę, tai skilimo greitis $\frac{dx}{dt}$ tenkina lygtį

$$\frac{dx}{dt}=-kx(t); \tag{1}$$

čia k – kokia nors teigiama konstanta.

(1) lygtyje prieš k yra minuso ženklas, nes $x(t)>0$, o $\frac{dx}{dt}<0$.

(1) lygtį vadinsime *diferencialine radioaktyviojo skilimo lygtimi.* Galima įrodyti (žr. § 34), kad bet kokia funkcija

$$x = Ce^{-kt}, \qquad (2)$$

kurioje C – konstanta, yra (1) lygties sprendinys ir kitų sprendinių ta lygtis neturi. Kitaip tariant, (2) formulė, kai C – bet kokia konstanta, aprašo bendrąjį (1) lygties sprendinį.

Koeficientas k priklauso tik nuo radioaktyviosios medžiagos rūšies. Konstantą C galima rasti iš pradinės sąlygos duotuoju laiko momentu t_0. Sakykime,

$$x(t_0) = m_0. \qquad (3)$$

Tada iš (2) formulės, kai $t=t_0$, išplaukia, kad $C=m_0 e^{kt_0}$. Vadinasi, sprendinys

$$x = m_0 e^{-k(t-t_0)} \qquad (4)$$

tenkins (3) pradinę sąlygą.

Praktikoje radioaktyviosios medžiagos skilimo greitį apibūdina vadinamasis *skilimo pusperiodis,* t.y. laikas, per kurį suskyla pusė turimos medžiagos. Skilimo pusperiodį pažymėkime raide T ir koeficientą k išreikškime dydžiu T.

Remdamiesi (4), kai $t=t_0+T$, gauname $\frac{m_0}{2}=m_0 e^{-kT}$, todėl $kT=\ln 2$, $k=\frac{\ln 2}{T}$.

Vadinasi, $x=m_0 e^{-\frac{t-t_0}{T}\ln 2}$, arba $x=m_0 2^{-\frac{t-t_0}{T}}$.

Atskiru atveju, kai $t_0=0$, $x=m_0 2^{-\frac{t}{T}}$.

3. Bendros pastabos apie medžiagos skilimo ir susidarymo lygtis. Daugelis medžiagos skilimo ir susidarymo procesų (žr. ankstesnius pavyzdžius) tenkina sąlygą: medžiagos kiekio kitimo greitis yra proporcingas tam tikrai turimo medžiagos kiekio nagrinėjamu laiko momentu funkcijai.

Sakykime, $x(t)$ yra medžiagos kiekis laiko momentu t. Tada duotąjį procesą aprašo lygtis

$$x' = kf(x);$$

čia f – tam tikra x funkcija, apibūdinanti procesą, o k – proporcingumo koeficientas, kuris gali būti pastovus, t.y. nepriklausyti nuo t, bet gali ir priklausyti. Pavyzdžiui, bakterijų dauginimosi lygtyje koeficientas k nebus pastovus, jeigu, atliekant eksperimentą, keisis sąlygos (temperatūra, apšvietimas ir t.t.), kuriomis bakterijos dauginasi.

Vadinasi, bendruoju atveju turime lygtį

$$x' = k(t) f(x).$$

Tokias diferencialines lygtis nagrinėsime 34 paragrafe.

4. Diferencialinė lygtis kreivės, kurios liestinė kiekviename taške yra žinoma. Sakykime, G yra tam tikra plokštumos, kurioje apibrėžta stačiakampė koordinačių sistema, taškų M aibė ir x, y – taško M koordinatės. Kadangi tarp plokštumos taškų ir skaičių porų $(x;\ y)$ yra abipus vienareikšmė atitiktis, tai sakysime, kad G yra taškų $(x;\ y)$ aibė.

Atitiktį f, kuri kiekvienam aibės G taškui $(x;\ y)$ priskiria tam tikrą realųjį skaičių $f(x;\ y)$, vadinsime *taško* $(x;\ y)$ arba *dviejų kintamųų* x, y *funkcija*, apibrėžta aibėje G ir žymėsime $f: G \to R$ arba $f(x;\ y)$, $(x;\ y) \in G$.

Nagrinėsime šitokį uždavinį.

Rasime lygtį kreivės, kurios liestinės kiekviename taške kampinis koeficientas yra $f(x;\ y)$.

Kitaip tariant, reikia rasti funkciją $y=\varphi(x)$, tenkinančią lygtį

$$y' = f(x;\ y); \qquad (1)$$

čia y' – ieškomosios funkcijos išvestinė x atžvilgiu. Tą lygtį vadinsime *diferencialine lygtimi*, funkciją $\varphi(x)$ – jos sprendiniu, o kreivę, aprašytą lygtimi $y=\varphi(x)$, – *integraline kreive*.

Išnagrinėsime vieną atskirą atvejį.

Sakykime, funkcija f priklauso tik nuo x ir yra apibrėžta tam tikrame intervale $]a;\ b[$. Lygtį

$$y' = f(x) \qquad (2)$$

jau išsprendėme neapibrėžtinių integralų teorijoje. Įrodėme, kad visi (2) lygties sprendiniai yra išreiškiami formule

$$y = \int f(x)\, dx.$$

Toje formulėje yra laisvoji konstanta C, tik ji neišreikšta. Iš tikrųjų, jeigu $F(x)$ yra kuri nors funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, tai

$$y = F(x) + C. \qquad (3)$$

Vadinasi, (2) lygtis turi be galo daug sprendinių. Bet kuri kreivė, aprašyta (3) lygtimi, kur C – fiksuota konstanta, yra duotojo uždavinio sprendinys.

Iš apibrėžtinių integralų teorijos žinome, kad kiekviena tolydžioji funkcija turi pirmykštę funkciją, kuri yra integralas su kintamu viršutiniu rėžiu. Vadinasi,

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + C.$$

Šia lygtimi aprašyta kreivė eina per tašką su koordinatėmis x_0, C. Taigi per kiekvieną tašką $(x_0;\ y_0)$, $x_0 \in]a;\ b[$, eina vienintelė integralinė kreivė

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + y_0.$$

1. Žinoma, kad per valandą bakterijų masė padvigubėja ir jų dauginimosi greitis yra tiesiog proporcingas esamam bakterijų kiekiui. Sudarykite nurodytos bakterijų rūšies dauginimosi diferencialinę lygtį ir raskite jos bendrąjį sprendinį.

2. Žinoma, kad per valandą radioaktyviosios medžiagos masė sumažėja 1%. Sudarykite diferencialinę skilimo lygtį ir raskite jos bendrąjį sprendinį.

3. Raskite radioaktyviosios medžiagos, aprašytos 2 pavyzdyje, skilimo pusperiodį.

4. Bake yra 100 l tirpalo, kuriame yra 10 kg druskos. Į baką pilamas vanduo 3 l per minutę greičiu ir tuo pačiu metu tirpalas pilamas iš bako 2 l per minutę greičiu; tirpalo koncentracija kinta tolygiai, nes tirpalas išmaišomas. Kiek druskos liks bake po 1 val?

5. Tam tikros medžiagos virtimo kita medžiaga greitis yra proporcingas dar nepakitusios medžiagos kiekiui. Po valandos nuo proceso pradžios liko 31,4 g, po 3 valandų – 9,7 g medžiagos. Kiek medžiagos buvo proceso pradžioje?

6. Raskite lygtį kreivės, einančios per tašką $M(0; 4)$, jeigu kreivės liestinės kiekviename taške kampinis koeficientas lygus to taško ordinatei.

7. Trintis lėtina skystyje besisukančio disko greitį. Trinties veikimas proporcingas kampiniam greičiui (proporcingumo koeficientas lygus k). Raskite kampinį greitį bet kuriuo laiko momentu $t>0$, jeigu pradiniu laiko momentu $t=0$ jis buvo ω_0.

8. Pagal Niutono dėsnį kūno atšalimo ore greitis proporcingas kūno ir oro temperatūrų skirtumui. Kai oro temperatūra yra 20°C, tai per 20 minučių kūnas atvėsta nuo 100° C iki 60°C. Raskite kūno temperatūros priklausomybę nuo laiko. Po kiek minučių kūno temperatūra bus 30°C?

§ 33. PAGRINDINĖS PIRMOSIOS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ TEORIJOS SĄVOKOS IR APIBRĖŽIMAI

Lygtis, kuriose nežinomieji yra funkcijos ir kuriose be pačių funkcijų yra ir jų išvestinės, vadinsime *diferencialinėmis lygtimis.*

Jeigu lygtyje yra nepriklausomas kintamasis, nežinomoji funkcija ir pirmoji jos išvestinė, tai ją vadinsime *pirmosios eilės diferencialine lygtimi.* Jeigu, be to, lygtyje yra antroji ieškomosios funkcijos išvestinė, tai lygtį vadinsime *antrosios eilės diferencialine lygtimi.* Analogiškai apibrėžtume trečiosios, ketvirtosios ir t.t. eilių diferencialines lygtis. Apskritai *diferencialinės lygties eile* vadinsime aukščiausios išvestinės, kuri yra lygtyje, eilę.

Daugelyje pavyzdžių (žr. pirmesnį paragrafą) ieškomosios funkcijos yra laiko t funkcijos. Tuomet jas žymėsime $x=x(t)$, $y=y(t)$ ir pan. Bendruoju atveju nepriklausomą kintamąjį, kaip įprasta, žymėsime x, o ieškomąsias funkcijas – $y=y(x)$, $z=z(x)$ ir pan. Kartais žymėsime ir kitaip.

Bendruoju atveju pirmosios eilės diferencialinę lygtį galime užrašyti šitaip:

$$F(x; y; y')=0; \tag{1}$$

čia $y=y(x)$ – ieškomoji funkcija, $y'=y'(x)$ – jos išvestinė pagal x, o F – duotoji kintamųjų x, y, y' funkcija.

Diferencialines lygtis, nagrinėtas pirmesniame paragrafe, galime užrašyti šitaip:

$$y'=f(x; y). \tag{2}$$

Tokias lygtis vadinsime *išreikštinėmis lygtimis išvestinės atžvilgiu*. Funkcija $\varphi(x), x \in]a; b[$, vadinama (2) *diferencialinės lygties sprendiniu*, jeigu ji turi išvestinę $\varphi'(x)$ intervale $]a; b[$ ir su bet kuriuo $x \in]a; b[$ yra teisinga lygybė

$$\varphi'(x) = f(x; \varphi(x)).$$

Kitaip tariant, funkcija $\varphi(x)$, $x \in]a; b[$, vadinama (2) diferencialinės lygties sprendiniu, jeigu ją įrašius vietoj y į (2) lygtį, pastaroji virsta tapatybe $x \in]a; b[$ atžvilgiu.

Analogiškai apibrėžiamas ir (1) diferencialinės lygties sprendinys.

Toliau nagrinėsime tik išreikštines išvestinės atžvilgiu lygtis, t.y. (2) pavidalo lygtis, arba lygtis, kurias galima pertvarkyti į (2) pavidalo lygtis.

Jeigu duota (2) lygtis, tai kartu yra duota ir kintamųjų x ir y funkcija $f(x; y)$. Geometriškai kintamųjų x ir y funkcija f – tai funkcija, apibrėžta tam tikroje plokštumos taškų su koordinatėmis x, y aibėje G.

Bet kokia kreivė, aprašyta lygtimi $y = \varphi(x)$, $x \in]a; b[$, kur $\varphi(x)$ – (2) lygties sprendinys, vadinama (2) diferencialinės lygties *integraline kreive*.

Remiantis tuo apibrėžimu, visa (2) lygties integralinė kreivė priklauso sričiai G, kurioje yra apibrėžta funkcija f, ir kiekviename integralinės kreivės taške $M(x; y)$ egzistuoja liestinė, kurios kampinis koeficientas lygus funkcijos f reikšmei tame taške.

Uždavinį, kai reikia rasti (2) lygties sprendinį, tenkinantį sąlygą

$$y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

kur x_0, y_0 – duotieji skaičiai, vadiname *Koši uždaviniu*, (3) sąlygą – *pradine sąlyga*, (2) lygties sprendinį, tenkinantį pradinę sąlygą (3), – *Koši uždavinio* (2), (3) *sprendiniu*.

Koši uždavinį paaiškinsime geometriškai. Remiantis apibrėžimu, išspręsti Koši uždavinį (2), (3) – reiškia rasti (2) lygties integralinę kreivę, einančią per duotąjį tašką $M_0(x_0; y_0)$.

Sakykime, funkcija $f(x; y)$ tenkina tam tikras gana bendras sąlygas. Tada per kiekvieną srities G, kurioje yra apibrėžta funkcija f, tašką eina vienintelė (2) lygties integralinė kreivė. To teiginio neįrodinėsime. Vadinasi, (2) diferencialinė lygtis turi be galo daug sprendinių.

Remiantis išnagrinėtais pavyzdžiais, visų (arba beveik visų diferencialinės lygties sprendinių aibė aprašoma formule

$$y = \varphi(x; C); \tag{4}$$

čia C – konstanta.

(4) funkciją, kuri su kiekviena fiksuota C reikšme yra (2) lygties sprendinys, vadinsime (2) *lygties bendruoju sprendiniu*.

Kiekvieną (2) lygties sprendinį, kuris gaunamas iš (4) bendrojo sprendinio, kai konstantos C reikšmė konkreti, vadinsime *atskiruoju sprendiniu*, o konstantą C – *integravimo konstanta*.

Padarysime paskutinę pastabą apie (2) pavidalo lygtis.

Padauginę abi (2) lygties puses iš nepriklausomo kintamojo diferencialo dx, gausime lygtį

$$dy = f(x;\ y)\,dx. \tag{5}$$

Ją irgi vadinsime pirmosios eilės diferencialine lygtimi. Iš diferencialo apibrėžimo išplaukia, kad (5) lygtis yra ekvivalenti (2) lygčiai.

Pratimai

1. Ar funkcijos

a) $y=\sin x-1$;

b) $y=e^{-\sin x}$;

c) $y=\sin x$

yra lygties

$$y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

sprendiniai?

2. Ar funkcijos

a) $y=\sqrt{1-x^2}$;

b) $y=-\sqrt{1-x^2}$;

c) $y=\sqrt{C-x^2}$

(C – bet kokia teigiama konstanta) yra lygties

$$x\,dx+y\,dy=0$$

sprendiniai?

3. Raskite tas α reikšmes, su kuriomis duotoji funkcija yra atitinkamos lygties sprendinys:

a) $y=e^{\alpha x}+\frac{1}{3}e^{x}, \quad y'+2y=e^{x}$;

b) $y=(x^2-x)^{\alpha}, \quad y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$;

c) $y=x^{\alpha}, \quad x^2y''+2xy'-6y=0.$

4. Raskite tas A ir α reikšmes, su kuriomis funkcija $y=A\cos\alpha x$ yra lygties $y'=y\operatorname{tg}x$ sprendinys.

§ 34. LYGTYS SU ATSKIRIAMAIS KINTAMAISIAIS

1. Apibrėžimai ir pavyzdžiai. Diferencialines lygtis

$$y'=f(x)\,g(y), \tag{1}$$

$f(x)$ ir $g(y)$ – duotosios funkcijos, vadinsime *lygtimis su atskiriamais kintamaisiais.*

Akivaizdu, kad funkcija $y=\alpha$ (konstanta) yra (1) lygties sprendinys, jeigu tik skaičius α yra lygties $g(y)=0$ sprendinys.

Su tais y, su kuriais $g(y)\neq 0$, (1) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$p(y)\,y'=f(x); \tag{2}$$

čia $p(y)=\frac{1}{g(y)}$. Toje lygtyje kintamasis y yra tik kairėje lygties pusėje, o kintamasis x – tik dešinėje. Todėl vietoj sakinio „(1) lygtį pakeisime (2) lygtimi“ dažnai sakysime „(1) lygtyje atskirsime kintamuosius“.

(2) lygtį dauginame iš dx:

$$p(y)\,dy=f(x)\,dx. \tag{3}$$

Kairėje pusėje yra tam tikros funkcijos $P(y)$, priklausančios nuo y, diferencialas, o dešinėje – funkcijos $F(x)$, priklausančios nuo x, diferencialas.

Suintegravę abi (2) lygties puses pagal x, gausime

$$P(y)=F(x)+C, \tag{4}$$

čia C – konstanta. Taigi, jeigu diferencijuojama funkcija $y=\varphi(x)$, $x\in\,]a;\,b[$, yra (2) lygties sprendinys, tai ji yra ir (4) lygties sprendinys su tam tikra konstantos C reikšme, t.y.

$$P\left(\varphi(x)\right)=F(x)+C \tag{5}$$

su bet kuriuo $x\in\,]a;\,b[$. Ir atvirkščiai, jeigu diferencijuojama funkcija $y=\varphi(x)$, $x\in\,]a;\,b[$, yra (4) lygties sprendinys, tai ji yra (2) diferencialinės lygties sprendinys. Iš tikrųjų, išdiferencijavę abi (5) lygybės puses x atžvilgiu, gauname

$$p\left(\varphi(x)\right)\,\varphi'(x)=f(x),$$

o tai reiškia, kad funkcija $\varphi(x)$ tenkina (2) lygtį.

Vadinasi, bet kuris (2) diferencialinės lygties sprendinys yra gaunamas iš (4) formulės. Tuo atveju sakysime, kad (4) formulė *aprašo* (2) *lygties bendrąjį sprendinį*.

Visi (2) lygties sprendiniai yra ir (1) lygties sprendiniai; kitų sprendinių srityje, kur $g(y)\neq 0$, (1) lygtis neturi. Jeigu funkcija $g(y)=0$, tai (1) lygties sprendiniai, be to, yra ir $y=a$, kai a – toks skaičius, kad $g(a)=0$.

1 pavyzdys. Rasime visus lygties

$$y'=1+y^2 \tag{6}$$

sprendinius.

Sprendimas. Tai yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Abi (6) lygties puses padalijame iš $1+y^2$ ir gautosios lygties

$$\frac{y'}{1+y^2}=1 \tag{7}$$

abi puses integruojame x atžvilgiu. Kadangi (7) lygties kairioji pusė yra funkcijos $\operatorname{arctg} y$, $y=y(x)$, išvestinė x atžvilgiu, tai suintegravę gausime

$$\operatorname{arctg} y = x + C;$$

C – laisva konstanta. Iš čia išplaukia, kad

$$y = \operatorname{tg}(x + C).$$

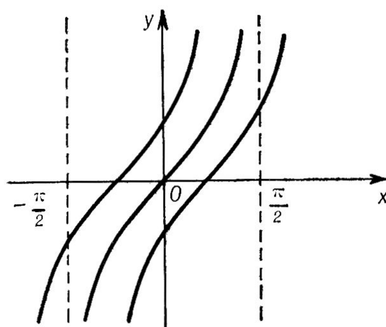
Tai ir yra (6) lygties bendrasis sprendinys. Kitų sprendinių ta lygtis neturi. Atitinkamų integralinių kreivių išsidėstymo schema pavaizduota 39 paveiksle. Visos jos gaunamos iš kreivės $y=\operatorname{tg} x$, pastarąją pastūmus ašimi Ox į kairę arba į dešinę.

2 pavyzdys. Rasime visus lygties

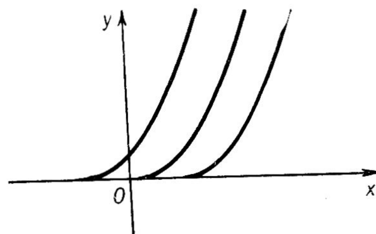
$$y' = 2\sqrt{y} \tag{8}$$

sprendinius.

Sprendimas. (8) lygtis yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Akivaizdu, kad funkcija $y=0$ yra jos sprendinys.



39 pav.



40 pav.

Sakykime, $y>0$. (8) lygtį padauginę iš dx, gausime

$$dy = 2\sqrt{y}\, dx.$$

Atskyrę kintamuosius:

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx$$

ir suintegravę, gausime

$$\sqrt{y} = x + C,$$

C – laisva konstanta. Iš čia išplaukia, kad $y=(x+C)^2$ ir $x+C \geqslant 0$.

Vadinasi, su kiekviena fiksuota konstantos C reikšme funkcija

$$y = (x + C)^2, \quad x \geqslant -C,$$

yra (8) lygties sprendinys. Kitų sprendinių pusplokštumėje $y>0$ ta lygtis neturi.

(8) lygties integralinių kreivių išsidėstymo schema pavaizduota 40 paveiksle. Pusplokštumėje $y>0$ kiekviena integralinė kreivė gaunama iš parabolės šakos

$$y=x^2, \quad x>0,$$

ją pastūmus ašimi Ox į kairę arba į dešinę. Tiesė Ox taip pat yra integralinė kreivė.

2. Bendrojo sprendinio ieškojimo taisyklė. Norint rasti įdiferencialinės lygties su atskiriamais kintamaisiais bendrąjį sprendinį, reikia:

1) atskirti kintamuosius, t.y. pertvarkyti duotąją lygtį:

$$p(y)\,dy=f(x)\,dx; \tag{1}$$

2) suintegruoti abi gautosios lygties puses atitinkamai y ir x atžvilgiu, t.y. rasti kurią nors funkcijos $p(y)$ pirmykštę funkciją $P(y)$ ir kurią nors $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$;

3) parašyti lygtį

$$P(y)=F(x)+C, \tag{2}$$

C – laisva konstanta.

Išsprendę (2) lygtį y atžvilgiu, gausime (1) diferencialinės lygties bendrąjį sprendinį

$$y=\varphi(x;\ C),$$

kurį taip pat vadinsime *duotosios lygties bendruoju sprendiniu.*

Pabrėšime, kad duotoji lygtis gali turėti ir kitų sprendinių. Pavyzdžiui, lygtis

$$y'=f(x)\,g(y), \tag{3}$$

kurios $g(y)=0$ taške y_0, turi sprendinį $y=y_0$. Tas sprendinys gali nepriklausyti bendrajam sprendiniui, t.y. jo negalima gauti iš bendrojo sprendinio nė su viena konstantos C reikšme. Todėl, norint rasti visus (3) lygties sprendinius, reikia dar rasti visus lygties $g(y)=0$ sprendinius.

1 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$y'=xy. \tag{4}$$

Sprendimas. Atskyrę kintamuosius:

$$\frac{dy}{y}=x\,dx$$

ir suintegravę, gausime

$$\ln|y|=\frac{1}{2}x^2+C_1,$$

C_1 – laisva konstanta. Iš čia

$$|y|=e^{C_1}\cdot e^{\frac{1}{2}x^2},$$

arba

$$y=Ce^{\frac{1}{2}x^2}; \tag{5}$$

čia $C=\pm e^{C_1}$.

Dešinioji (4) lygties pusė lygi nuliui, kai $y=0$, todėl ji turi sprendinį $y=0$. Tą sprendinį gausime iš (5), kai $C=0$. Vadinasi, (5) formulė, kur C – laisva konstanta, aprašo visus (4) lygties sprendinius.

2 pavyzdys. Rasime visus diferencialinės lygties

$$y'=xy^2$$

sprendinius.

Sprendimas. Akivaizdu, kad $y=0$ yra duotosios lygties sprendinys. Sakykime, $y\neq 0$. Tada

$$\frac{dy}{y^2}=xdx,$$

todėl

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}x^2+C.$$

Vadinasi, duotosios lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=-\frac{2}{y^2+C},$$

C – laisva konstanta. Pabrėšime, kad sprendinio $y=0$ negalima gauti iš bendrojo sprendinio nė su viena konstantos C reikšme.

3 pavyzdys. Išspręsime diferencialinę lygtį

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

Sprendimas. Atskyrę kintamuosius:

$$y\,dy=-x\,dx$$

ir suintegravę, gausime

$$y^2+x^2=C.$$

Akivaizdu, kad čia $C>0$. Pažymėkime $C=R^2$.

Gautoji lygtis aprašo apskritimą su centru taške (0; 0) ir spinduliu R. Su kiekvienu fiksuotu $R>0$ ji apibrėžia dvi diferencijuojamas funkcijas

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2},\quad x\in]-R;\ R[,$$

kurios ir yra duotosios lygties sprendiniai. Kitų sprendinių ta lygtis neturi.

Duotosios lygties integralinės kreivės yra pusapskritimiai, esantys atvirosiose apatinėje ir viršutinėje pusplokštumėse (41 pav.).

Pastaba. 3 pavyzdyje nagrinėtą lygtį galime užrašyti su diferencialais:

$$y\,dx+x\,dx=0.$$

Dabar kintamieji x ir y yra lygiaverčiai: kintamąjį y galima laikyti x funkcija ir atvirkščiai – kintamąjį x laikyti y funkcija. Todėl kartais sakoma, kad tos lygties integralinės kreivės yra apskritimai su centru koordinačių pradžioje.

4 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$y' = \frac{xy \cos x}{1+y}. \tag{6}$$

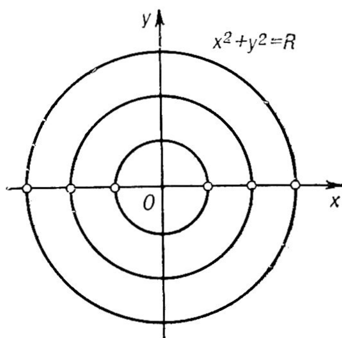
Sprendimas. Akivaizdu, kad pastovi funkcija $y=0$ yra sprendinys. Sakykime, $y \neq 0$. Atskyrę kintamuosius:

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = x \cos x \, dx$$

ir suintegravę kairiąją tos lygties pusę y atžvilgiu, o dešiniąją – x atžvilgiu, gausime lygtį

$$y + \ln|y| = x \sin x + \cos x + C, \tag{7}$$

C – laisva konstanta.



41 pav.

Norint rasti (6) lygties bendrąjį sprendinį, reikia išspręsti (7) lygtį y atžvilgiu. Gaila, bet jos išspręsti negalime, nes sprendiniai neišreiškiami elementariosiomis funkcijomis. Tačiau diferencialinės lygties bendrojo sprendinio ieškojimo uždavinį suvedėme į lygties, neturinčios išvestinių, sprendimą. Tuo atveju sakysime, kad (6) lygties bendrasis sprendinys aprašytas (7) formule. Kreivės, kurių taškų koordinatės, esant kokiai nors konstantos C reikšmei, tenkina (7) lygtį, bus (6) lygties integralinės kreivės. Tiesė $y=0$ taip pat bus (6) lygties integralinė kreivė.

Pratimai

Išspręskite lygtis:

1. $y' = x + \sin x$.

2. $y' = e^{-y} - 1$.

3. $y' = \frac{y+1}{x-1}$.

4. $\sqrt{1-x^2}\, y' + xy = 0$.

5. $(\sin x)\, y' = y \ln y$.

6. $y' = e^{x+y}$.

7. $y \sin \sin x\, dx + \cos x\, dy = 0$.

8. $e^y (1+x^2)\, dy - 2x(1+e^y)\, dx = 0$.

9. $(1+x)\, dy = 2y\, dx$.

10. $xy\, dx + (x+1)\, dy = 0$.

11. $(1+y^2)\, dx - x\, dy = 0$.

Raskite visus lygčių sprendinius:

12. $y' = \sqrt[3]{y^2}$.

13. $y' = \sqrt{1-y^2}$.

14. $y' = 4x\sqrt{y-1}$.

15. $xy' + y = y^2$.

16. $dy - xy(y+2)\, dx = 0$.

17. $\sqrt{y} \sin^2 x\, dx + dy = 0$.

Raskite Koši uždavinio sprendinį:

18. $tx' = 2x$, $x(2) = 3$.

19. $(1-t)x' - x = 0$, $x(0) = 1$.

20. $x' = \frac{t(1-x^2)}{x(1+t^2)}$, $x(\sqrt{3}) = -\frac{3}{2}$.

Raskite lygties integralines kreives, einančias per tašką M:

21. $y' = \frac{y}{x}$, a) $M(1;\ 1)$; b) $M(1;\ 0)$.

22. $dx - \sqrt{1-x^2}\, dy = 0$, $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$.

23. Raskite visas kreives, pasižyminčias savybe: jeigu per bet kurį kreivės tašką išvesime tieses, lygiagrečias koordinačių ašims, iki sankirtos su tomis ašimis, tai kreivė gautąjį stačiakampį padalys į dvi figūras, kurių plotų santykis bus 1 : 2.

24. Kūno greitis proporcingas nueitam keliui. Per pirmąsias 10 sekundžių kūnas nueina 100 metrų, per 15 sekundžių – 200 metrų. Raskite kelią, kurį kūnas nueis per laiką t.

Raskite lygtis integralinių kreivių, einančių per tašką M:

25. $(1+e^x)\, yy' = e^y$, $M(0;\ 0)$.

26. $x\sqrt{1-y^2}\, dx + y\sqrt{1-x^2}\, dy = 0$, $M(0;\ 1)$.

§ 35. PIRMOSIOS EILĖS TIESINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS

1. Pirmosios eilės tiesinės diferencialinės lygties bendrasis sprendinys. Diferencialines lygtis

$$y' = f(x)\,y + g(x) \tag{1}$$

vadinsime *pirmosios eilės tiesinėmis diferencialinėmis lygtimis.*

Jeigu $g(x) \equiv 0$, tai (1) tiesinę diferencialinę lygtį vadinsime *homogenine.* Ją galime užrašyti šitaip:

$$y' = f(x)\,y. \tag{2}$$

Tai yra lygtis su atskiriamais kintamaisiais. Ankstesniajame paragrafe įrodėme, kad visi tos lygties sprendiniai aprašomi formule

$$y = Ce^{F(x)}; \tag{3}$$

čia $F(x)$ – kuri nors funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, o C – laisva konstanta. Atskiru atveju, kai funkcija $f(x)$ yra pastovi, pavyzdžiui, $f(x) = k$ su bet kuriuo x, lygties

$$y' = ky$$

bendrasis sprendinys yra

$$y = Ce^{kx}.$$

Jeigu $f(x) \equiv 0$, tai (1) lygtis virsta šitokia:

$$y' = g(x).$$

Kaip žinoma, tos lygties bendrasis sprendinys yra

$$y = G(x) + C;$$

čia $G(x)$ – kuri nors funkcijos $g(x)$ pirmykštė funkcija, o C – laisva konstanta (integravimo konstanta).

Teorema. *Jeigu $y = \varphi(x)$ yra kuris nors* (1) *lygties sprendinys, tai visi tos lygties sprendiniai aprašomi formule*

$$y = Ce^{F(x)} + \varphi(x); \tag{4}$$

čia $Ce^{F(x)}$ – (2) *homogeninės lygties bendrasis sprendinys.*

Įrodymas. Iš pradžių įsitikinsime, kad su bet kuria konstantos C reikšme (4) funkcija yra (1) lygties sprendinys. Iš tikrųjų,

$$y' = Ce^{F(x)}F'(x) + \varphi'(x) = Ce^{F(x)}f(x) + f(x)\,\varphi(x) + g(x) =$$

$$= f(x)\left(Ce^{F(x)} + \varphi(x)\right) + g(x) = f(x)\,y + g(x).$$

Sakykime, $\psi(x)$ yra kuris nors (1) lygties sprendinys. Įrodysime, kad funkcija $y=\psi(x)-\varphi(x)$ yra (2) homogeninės lygties sprendinys:

$$y'=\psi'(x)-\varphi'(x)=f(x)\,\psi(x)+g(x)-f(x)\,\varphi(x)-g(x)=$$

$$=f(x)\,(\psi(x)-\varphi(x))=f(x)\,y.$$

Todėl egzistuoja tokia konstanta C, kad

$$\psi(x)-\varphi(x)=Ce^{F(x)},$$

taigi

$$\psi(x)=Ce^{F(x)}+\varphi(x).$$

Vadinasi, bet kurį (1) lygties sprendinį gauname pagal (4) formulę su kuria nors konstantos C reikšme.

Teorema įrodyta.

Iš įrodytosios teoremos išplaukia, kad, norint rasti (1) lygties bendrąjį sprendinį, pakanka rasti bent vieną jos atskirąjį sprendinį.

Tiesinės lygties

$$y'=ky+b, \tag{5}$$

k ir b – kokie nors skaičiai, $k\neq 0$, atskirąjį sprendinį rastume nesunkiai. Lengva įsitikinti, kad juo bus funkcija $y=-\frac{b}{k}$. Todėl (5) lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=Ce^{kx}-\frac{b}{k}.$$

1 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$y'+2y+3=0.$$

Sprendimas. Kadangi $k=-2$, $b=-3$, tai bendrasis sprendinys aprašomas formule

$$y=Ce^{-2x}-\frac{3}{2},$$

C – laisva konstanta.

2 pavyzdys. Rasime diferencialinės lygties

$$y'+xy=4x$$

bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Tikrindami funkcijas, įsitikiname, kad funkcija $y=4$ yra tos tiesinės nehomogeninės lygties sprendinys. Dabar rasime atitinkamos homogeninės lygties

$$y'+xy=0$$

bendrąjį sprendinį.

Pagal (4) formulę tos lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Remiantis įrodytąja teorema, duotosios tiesinės nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}+4,$$

C – laisva konstanta.

2. Konstantos variacijos metodas. Nurodysime, kaip reikia rasti nehomogeninės lygties

$$y'=f(x)\,y+g(x) \tag{1}$$

atskirąjį sprendinį. Sakykime,

$$y=Ce^{F(x)} \tag{2}$$

yra tiesinės homogeninės lygties

$$y'=f(x)\,y \tag{3}$$

bendrasis sprendinys. Tada ieškosime (1) nehomogeninės lygties atskirojo sprendinio šiuo pavidalu:

$$y=u(x)\,e^{F(x)}; \tag{4}$$

čia $u(x)$ – nežinomoji funkcija. (4) funkciją įrašę į (1) lygtį, gausime

$$u'e^F+ue^Ff=fue^F+g$$

ir galutinai

$$u'=g(x)\,e^{-F(x)}.$$

Vadinasi, funkcija $u(x)$ yra kuri nors funkcijos $g(x)\,e^{-F(x)}$ pirmykštė funkcija.

Taigi, norint rasti (1) nehomogeninės lygties atskirąjį sprendinį, reikia atitinkamos homogeninės lygties (3) bendrajame sprendinyje (2) konstantą C pakeisti kuria nors funkcijos $g(x)\,e^{-F(x)}$ pirmykšte funkcija.

Tą atskirojo sprendinio radimo metodą vadinsime *konstantos variacijos metodu.*

1 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$y'+xy=\sin x. \tag{5}$$

Sprendimas. Tos lygties atskirojo sprendinio, parenkant funkcijas, nepavyksta rasti. Jo ieškosime konstantos variacijos metodu.

Kadangi atitinkamos homogeninės lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2},$$

tai ieškosime nehomogeninės lygties atskirojo sprendinio šiuo pavidalu:

$$y=u(x)\,e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

$u(x)$ — nežinomoji funkcija.

Įrašę jį į lygtį, gausime

$$u'=\sin x\cdot e^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Iš čia

$$u(x)=\int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2}\sin t\,dt.$$

Vadinasi, (5) lygties atskirasis sprendinys yra

$$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2}\sin t\,dt,$$

o bendrasıs sprendinys, remiantis teorema, išreiškiamas formule

$$y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}+e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{x_0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2}\sin t\,dt, \tag{6}$$

C — laisva konstanta, o x_0 — koks nors fiksuotas skaičius.

2 pavyzdys. Rasime (5) lygties atskirąjį sprendinį, tenkinantį sąlygą $y(0)=1$.

Sprendimas. Patogumo dėlei laikysime, kad (6) formulėje $x_0=0$. Tada (5) lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=Ce^{-\frac{1}{2}x^2}+e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2}\sin t\,dt.$$

Pasinaudoję sąlyga $y(0)=1$, gauname $C=1$, todėl duotojo uždavinio sprendinys bus

$$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}+e^{-\frac{1}{2}x^2}\int_{0}^{x} e^{\frac{1}{2}t^2}\sin t\,dt.$$

Pratimai

1. Išspręskite lygtis:

1. $x'=-\frac{2x}{t}+t^2.$

2. $x'=2t-2tx.$

3. $x'+x\,\mathrm{tg}\,t=\frac{1}{\cos t}.$

4. $x' = 2tx + (t - t^3) e^{t^2}$.

5. $t(t^3 + 1) x' + (2t^3 - 1) x = x^2 - \frac{2}{x}$.

Raskite sprendinį, tenkinantį nurodytą pradinę sąlygą:

6. $(9 - t^2) x' + tx = 9, \quad x(3) = 3$.

7. $x' - x \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}, \quad x(0) = 0$.

8. $x' = x \sin t + 2 \sin 2t, \quad x(0) = 1$.

9. $(t+1)\, dx = \left(2x + (t+1)^4\right) dt, \quad x(0) = 2$.

10. Elektrinė grandinė sudaryta iš nuosekliai sujungtų: pastovios srovės šaltinio, kurio įtampa yra V, varžos R, indukcinės ritės L ir jungiklio, įjungto laiko momentu $t = 0$. Raskite srovės stiprumo priklausomybę nuo laiko.

11. Elektrinė grandinė sudaryta iš nuosekliai sujungtų: srovės šaltinio, kurio įtampa keičiasi pagal dėsnį $E = V \sin \omega t$, varžos R ir indukcinės ritės L. Raskite srovės stiprumą grandinėje, kai režimas stabilus.

§ 36. ANTROSIOS EILĖS DIFERENCIALINIŲ LYGČIŲ PAVYZDŽIAI

1. Taško judėjimo lygtis. Nagrinėsime jėgos F veikiamo taško P, kurio masė yra m, judėjimą tiese l. Tuo tikslu tiesėje l parinksime kokį nors tašką O ir kurią nors kryptį, pavyzdžiui, iš kairės į dešinę (42 pav.). Tada taško P padėtis tiesėje l laiko momentu t nusakoma koordinate $x = x(t)$.



42 pav.

Kaip žinome, pirmoji išvestinė $x'(t)$ yra taško P greitis, o antroji išvestinė $x''(t)$ – taško P pagreitis laiko momentu t. Todėl, remiantis antruoju Niutono dėsniu, yra teisinga lygtis

$$mx''(t) = F, \tag{1}$$

kurią vadinsime *taško P judėjimo lygtimi.*

Bendruoju atveju jėga F (1) lygtyje gali priklausyti nuo laiko t, nuo taško padėties x ir nuo greičio $x'(t)$, t.y. bendruoju atveju (1) lygtis yra

$$mx'' = F(t;\ x;\ x'), \tag{2}$$

F – duotoji kintamųjų t, x, x' funkcija.

Kadangi (2) lygtyje yra antrosios eilės išvestinė, tai ją vadinsime *antrosios eilės diferencialine lygtimi.*

Funkcija $\varphi(t)$, $t\in]a; b[$, vadinama (2) *lygties sprendiniu*, jeigu ji turi išvestines $\varphi'(t)$ ir $\varphi''(t)$ intervale $]a; b[$ ir su kiekvienu $t\in]a; b[$ yra teisinga lygybė

$$m\varphi''(t)=F\left(t; \varphi(t); \varphi'(t)\right),$$

t.y. jeigu lygtis, funkciją $\varphi(t)$ įrašius vietoj x, yra tapatybė t atžvilgiu.

Kaip žinome iš fizikos, norint vienareikšmiškai nusakyti taško judėjimą, be judėjimo lygties reikia žinoti taško padėtį ir greitį kuriuo nors laiko momentu t_0:

$$x(t_0)=x_0, \quad x'(t_0)=v_0. \tag{3}$$

(3) sąlygas vadinsime *pradinėmis*, arba *Koši sąlygomis*, o uždavinį, kaip rasti (2) lygties sprendinį, tenkinantį (3) pradines sąlygas, vadinsime *Koši uždaviniu*. Galima įrodyti, kad plačiai (2) lygčių aibei Koši uždavinys turi vienintelį sprendinį.

2. Taško judėjimas, veikiant pastoviai jėgai. Iš pradžių nagrinėsime atvejį, kai jėga F nekinta, taškui P judant, t.y. jėga F yra pastovi. Tada judėjimo lygtis yra

$$x''=a, \tag{1}$$

$a=\frac{F}{m}$. Iš (1) lygties išplaukia, kad greitis $v=x'$ tenkina pirmosios eilės diferencialinę lygtį:

$$v'=a. \tag{2}$$

Iš neapibrėžtinių integralų teorijos žinome, kad formule

$$v=at+C_1,$$

kur C_1 – laisva konstanta, išreiškiami visi (2) lygties sprendiniai. Vadinasi, (1) antrosios eilės lygties sprendimą suvedėme į pirmosios eilės diferencialinės lygties

$$x'=at+C_1 \tag{3}$$

sprendimą. Suintegravę t atžvilgiu, gauname

$$x=\frac{1}{2}at^2+C_1t+C_2; \tag{4}$$

čia C_2 – laisva konstanta.

Vadinasi, (4) formulė aprašo visus (1) lygties sprendinius, todėl ją vadinsime (1) *lygties bendruoju sprendiniu*.

Antrosios eilės diferencialinės lygties (1) bendrajame sprendinyje yra dvi laisvos konstantos C_1 ir C_2. Kai konstantų C_1 ir C_2 reikšmės (4) formulėje yra konkrečios, gauname sprendinius, kuriuos vadinsime *atskiraisiais*.

Norėdami gauti atskirąjį sprendinį, apibrėšime pradines sąlygas:

$$x(t_0)=x_0, \quad x'(t_0)=v_0. \tag{5}$$

Tada C_1 ir C_2 rasime, išsprendę šią tiesinių algebrinių lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\, at_0^2 + C_1 t_0 + C_2 = x_0, \\ at_0 + C_1 = v_0. \end{cases}$$

Išsprendę tą sistemą C_1 ir C_2 atžvilgiu ir įrašę gautąsias reikšmes į (4) formulę, gausime (1) lygties Koši uždavinio sprendinį, tenkinantį (5) pradines sąlygas.

Tačiau praktikoje (1), (5) Koši uždavinio sprendinys randamas kitokiu būdu.

Suintegravę abi (1) lygties puses t atžvilgiu nuo t_0 iki t:

$$\int_{t_0}^{t} x''(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

ir pasinaudoję Niutono—Leibnico formule, gausime pirmosios eilės diferencialinę lygtį

$$x'(t) - x'(t_0) = a(t - t_0).$$

Vėl suintegravę t atžvilgiu nuo t_0 iki t, gausime

$$x(t) - x(t_0) - x'(t_0)(t - t_0) = \frac{a}{2}(t - t_0)^2.$$

Vadinasi,

$$x = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + x'(t_0)(t - t_0) + x(t_0).$$

Dabar, norėdami gauti sprendinį, tenkinantį (5) pradines sąlygas, vietoj $x(t_0)$ įrašysime x_0, vietoj $x'(t_0)$ įrašysime v_0.

Taigi (1), (5) Koši uždavinio sprendinys yra

$$x = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0.$$

Pavyzdys. Nagrinėsime materialaus taško judėjimą, veikiant sunkio jėgai. Tuo tikslu ašį Ox nukreipsime vertikaliai žemyn ir paprastumo dėlei laikysime $t_0=0$. Tada judėjimo lygtis bus $x''=g$, $g\approx 9{,}8$ m/s^2 – laisvojo kritimo pagreitis. Išsprendę tą lygtį, gausime

$$x = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0.$$

3. Taško judėjimas, veikiant periodinei jėgai. Sakykime, tašką P, kurio masė yra m, veikianti jėga F priklauso nuo laiko t šitaip:

$$F = A\cos(\omega t + \alpha);$$

$A>0$ ir $\omega>0$.

Tada judėjimo lygtis yra

$$mx'' = A\cos(\omega t + \alpha).$$

Rasime tos lygties sprendinius. Abi jos puses suintegravę t atžvilgiu nuo t_0 iki t, gausime

$$mx'(t)-mx'(t_0)=A\int_{t_0}^{t}\cos(\omega t+\alpha)\,dt=\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\alpha)\Big|_{t_0}^{t}=$$

$$=\frac{A}{\omega}\sin(\omega t+\alpha)-\frac{A}{\omega}\sin(\omega t_0+\alpha).$$

Taigi

$$x'(t)=\frac{A}{\omega m}\sin(\omega t+\alpha)+x'(t_0)-\frac{A}{\omega m}\sin(\omega t_0+\alpha).$$

Vėl suintegravę t atžvilgiu nuo t_0 iki t, gausime

$$x(t)-x(t_0)=-\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t+\alpha)+\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t_0+\alpha)+$$

$$+\left(x'(t_0)-\frac{A}{m\omega}\sin(\omega t_0+\alpha)\right)(t-t_0).$$

Vadinasi,

$$x=-\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t+\alpha)+\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t_0+\alpha)+$$

$$+\left(v_0-\frac{A}{m\omega}\sin(\omega t_0+\alpha)\right)(t-t_0)+x_0;$$

čia $x_0=x(t_0)$, $v_0=x'(t_0)$. Atskiru atveju, kai $t_0=0$,

$$x=-\frac{A}{m\omega^2}\cos(\omega t+\alpha)+\frac{A}{m\omega^2}\cos\alpha+\left(v_0-\frac{A}{m\omega}\sin\alpha\right)t+x_0.$$

Pabrėšime, kad gautajame sprendinyje yra dvi laisvos konstantos – pradiniai duomenys x_0 ir v_0.

4. Taško judėjimas, veikiant jėgai, proporcingai greičiui. Sakykime, tašką P, kurio masė yra m, veikia dvi jėgos: pastovi jėga F, nukreipta taško judėjimo kryptimi, ir jėga, proporcinga greičiui ir nukreipta prieš judėjimo kryptį. Tada taško P judėjimo lygtis yra

$$mx''=F-kx'; \tag{1}$$

čia k – proporcingumo koeficientas, be to, $k>0$.

Suintegravę abi (1) lygties puses t atžvilgiu, gausime

$$mx'=Ft-kx+C, \tag{2}$$

C – integravimo konstanta.

(2) lygtis yra tiesinė. Norėdami rasti jos bendrąjį sprendinį, rasime atitinkamos homogeninės lygties

$$mx'=-kx \tag{3}$$

bendrąjį sprendinį ir kurį nors (2) nehomogeninės lygties atskirąjį sprendinį.

(3) lygties bendrasis sprendinys yra

$$x=C_1 e^{-\frac{k}{m}t},$$

C_1 – laisva konstanta.

Rasime (2) lygties atskirąjį sprendinį tiesinės funkcijos

$$x=At+B \tag{4}$$

su nežinomais koeficientais A ir B pavidalo.

Norėdami rasti A ir B, (4) funkciją įrašysime į (2) lygtį:

$$Am=Ft-kAt-kB+C.$$

Kadangi ši lygybė turi būti teisinga su bet kuriuo t, tai, kai $t=0$, gauname lygtį

$$Am=-kB+C,$$

o, kai $t=1$,

$$F-kA=0.$$

Taigi

$$A=\frac{F}{k}, \quad B=\frac{C}{k}-\frac{Fm}{k^2},$$

o funkcija

$$x=\frac{F}{k}t+\frac{C}{k}-\frac{Fm}{k^2}$$

yra (2) lygties atskirasis sprendinys.

Remiantis ankstesniame paragrafe įrodyta teorema, (2) lygties bendrasis sprendinys aprašomas formule

$$x=C_1 e^{-\frac{kt}{m}}+\frac{F}{k}t+\frac{C}{k}-\frac{Fm}{k^2}.$$

Pažymėkime

$$C_2=\frac{C}{k}-\frac{Fm}{k^2}.$$

Jeigu C yra laisva konstanta, tai akivaizdu, kad ir C_2 – laisva konstanta. Todėl (1) lygties bendrasis sprendinys yra

$$x=C_1 e^{-\frac{kt}{m}}+C_2+\frac{F}{k}t. \tag{5}$$

Iš (5) formulės išplaukia, kad taškas P juda beveik pastoviu greičiu $\frac{F}{k}$. Tai plačiai pritaikoma praktikoje. Pavyzdžiui, tuo pagrįstas parašiuto naudojimas. Kai žmogus leidžiasi parašiutu, jį veikia sunkio jėga $F=mg$ ir oro pasipriešinimo jėga, proporcinga greičiui ir nukreipta prieš judėjimo kryptį. Žmogaus judėjimas (leidimasis) parašiutu aprašomas (5) lygtimi.

1. Valties pradinis greitis bus $v_0=6$ m/s. Praėjus 69 sekundėms nuo judėjimo pradžios, jos greitis sumažėjo du kartus. Raskite valties judėjimo dėsnį, jeigu vandens pasipriešinimo jėga tiesiog proporcinga valties greičiui.

2. Dalelę, kurios masė yra m, metame vertikaliai aukštyn. Ją veikia sunkio jėga ir pasipriešinimo jėga, lygi $2kmv$. Raskite dalelės atstumą nuo išmetimo taško laiko momentu t, jeigu jos pradinis greitis buvo v_0.

3. Kulka sminga į h cm storio lentą v_0 m/s greičiu, perveria ją ir išlekia v_1 m/s greičiu. Raskite kulkos judėjimo lentoje laiką, jeigu žinoma, kad lentos pasipriešinimo jėga proporcinga kulkos greičio kvadratui.

4. Parašykite masės m taško tiesiaeigio judėjimo, veikiant jėgai $F=t^2$, lygtį ir raskite jos bendrąjį sprendinį.

5. Išspręskite lygtį

$$2x''+t^3=1.$$

6. Išspręskite Koši uždavinį

$$\begin{cases} x''=5t^2+0{,}1; \\ x(0)=1; \quad x'(0)=0. \end{cases}$$

§ 37. HARMONINIAI SVYRAVIMAI

1. Harmoninių svyravimų lygtis. Nagrinėsime lygtį

$$x''+\omega^2 x=0, \tag{1}$$

kurioje ω — koks nors teigiamas skaičius.

Betarpiškai tikrindami, įsitikiname, kad funkcija

$$x=A\cos(\omega t+\alpha) \tag{2}$$

su bet kokiomis konstantų A ir α reikšmėmis yra (1) lygties sprendinys. Galima įrodyti, kad (1) lygtis kitų sprendinių neturi, bet to teiginio neįrodinėsime.

Taigi (2) formule išreiškiamas (1) lygties bendrasis sprendinys.

(2) funkcija su bet kokiomis duotosiomis A, ω ir α reikšmėmis aprašo *harmoninį svyravimo procesą.* Skaičius A vadinamas amplitude, skaičius α – *pradine* faze, arba tiesiog (2) svyravimo *faze,* (1) lygtis – *harmoninių svyravimų lygtimi,* o teigiamas skaičius ω – svyravimo *dažniu.* Nesunkiai apskaičiuotume, kad svyravimų per laiko vienetą skaičius apibrėžiamas formule

$$\nu=\frac{\omega}{2\pi}.$$

Pabrėšime, kad (1) lygties (2) bendrajame sprendinyje yra dvi laisvos konstantos: amplitudė A ir pradinė fazė α. Norint jas apibrėžti, reikia turėti dvi sąlygas, pavyzdžiui, dvi pradines Koši uždavinio sąlygas

$$x(t_0)=x_0, \quad x'(t_0)=v_0. \tag{3}$$

Tada konstantos A ir α randamos iš lygčių sistemos

$$\begin{cases} A\cos(\omega t_0+\alpha)=x_0, \\ -A\omega\sin(\omega t_0+\alpha)=v_0. \end{cases} \tag{4}$$

Iš jos išplaukia, kad

$$A^2\cos^2(\omega t_0+\alpha)+A^2\sin^2(\omega t_0+\alpha)=x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

Taigi

$$A^2=x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

Nemažindami bendrumo, galime laikyti $A>0$. Todėl

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

Dabar, žinodami amplitudę A, iš (4) sistemos pagal trigonometrijos formules rasime pradinę fazę α.

Iš (2) formulės nesunkiai gautume (1) lygties bendrąjį sprendinį kito pavidalo. Iš tikrųjų,

$$x=A(\cos\omega t\cos\alpha-\sin\omega t\sin\alpha)=A\cos\alpha\cos\omega t-A\sin\alpha\sin\omega t.$$

Įrašę čia $C_1=A\cos\alpha$, $C_2=-A\sin\alpha$, gausime

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t. \tag{5}$$

Sprendžiant konkrečius uždavinius, reikia naudotis tiek (2), tiek ir (5) formule.

Pavyzdžiui, jeigu amplitudė ir pradinė svyravimo fazė yra žinomos iš uždavinio sąlygų, tai reikia naudotis (2) formule. Tačiau, sprendžiant Koši uždavinį su pradinėmis sąlygomis

$$x(0)=x_0, \quad x'(0)=v_0, \tag{6}$$

patogesnė (5) formulė.

Pavyzdys. Išspręskime Koši uždavinį, kai duota (1) lygtis su (6) pradinėmis sąlygomis.

Sprendimas. Remiantis (5) formule, duotosios lygties bendrasis sprendinys yra

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t.$$

Iš pirmosios pradinės sąlygos $x(0)=x_0$ gauname $C_1=x_0$. Kadangi

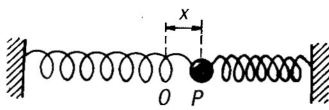
$$x'=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t,$$

tai, remdamiesi antrąja pradine sąlyga $x'(0)=v_0$, randame $v_0=C_2\omega$, t.y. $C_2=\frac{v_0}{\omega}$. Vadinasi, funkcija

$$x=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

yra (1), (6) Koši uždavinio sprendinys, ir kitų sprendinių tas uždavinys neturi.

2. Taško svyravimai, veikiant tamprumo jėgai. Nagrinėsime masės m taško P judėjimą, veikiant jėgai F, kurią sukelia kokia nors tampri spyruoklė (43 pav.).



43 pav.

Sudarysime taško P judėjimo tiese lygtį. Koordinačių pradžia O laikysime taško P pusiausvyros tašką. Sakykime, x yra taško P koordinatė, o teigiama kryptis – iš kairės į dešinę. Tada pagal antrąjį Niutono dėsnį taško judėjimo lygtis yra

$$mx'' = F.$$

Pagal Huko dėsnį tamprumo jėga F tiesiog proporcinga taško P nuokrypai nuo pusiausvyros padėties ir nukreipta prieš judėjimo kryptį. Todėl

$$F = -kx;$$

skaičius $k>0$ vadinamas duotosios spyruoklės *tamprumo koeficientu.*

Vadinasi, taško P judėjimo lygtis yra

$$mx'' + kx = 0. \tag{1}$$

Tai – harmoninių svyravimų dažniu

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

lygtis. Todėl jos bendrasis sprendinys yra

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \alpha\right)$$

arba

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Remiantis bendrosiomis formulėmis, (1) lygties Koši uždavinio su pradinėmis sąlygomis

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0 \tag{2}$$

sprendinys bus funkcija

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

Šio harmoninio svyravimo amplitudė apskaičiuojama pagal formulę

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}\,v_0^2}.$$

Pabrėšime, kad taško P svyravimo dažnis nepriklauso nuo pradinių sąlygų; jis priklauso tik nuo taško P masės ir spyruoklės tamprumo. Amplitudė A ir pradinė fazė iš esmės priklauso nuo pradinių sąlygų.

Išnagrinėsime porą atskirųjų (1), (2) Koši uždavinio sprendinių.

Sakykime, $v_0=0$ ir $x_0>0$. Tada

$$x=x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t,$$

t.y. $A=x_0$ ir $\alpha=0$. Ta funkcija aprašo masės m taško P harmoninius svyravimus; tas taškas pradiniu laiko momentu $t_0=0$ buvo paleistas iš taško, kurio koordinatė $x_0>0$, o pradinis greitis buvo lygus nuliui.

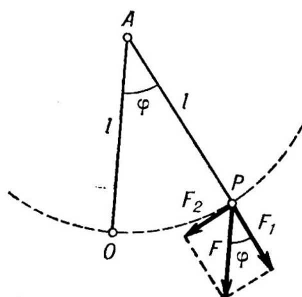
Sakykime, $x_0=0$ ir $v_0>0$. Tada

$$x=v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t,$$

taigi $A=v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$ ir $\alpha=-\frac{\pi}{2}$. Ta funkcija aprašo taško P harmoninius svyravimus; pradiniu laiko momentu $t_0=0$ tas taškas buvo paleistas iš pusiausvyros taško greičiu v_0.

3. Matematinės švytuoklės svyravimai. Matematinė švytuoklė – tai masės m taškas P, kuris sunkio jėgos veikiamas juda apskritimu, esančiu vertikalioje plokštumoje. To apskritimo spindulys vadinamas *švytuoklės ilgiu.*

Įvesime švytuoklės judėjimo apskritimu kampinę koordinatę φ, koordinačių pradžia O laikydami žemiausią apskritimo tašką, o teigiama kryptimi – kryptį iš kairės į dešinę (44 pav.).



44 pav.

Taškas P juda, veikiamas sunkio jėgos $F=mg$, nukreiptos vertikaliai žemyn. F užrašysime kaip dviejų dedamųjų F_1 ir F_2 sumą. Dedamoji F_1, nukreipta išilgai apskritimo spindulio, judėjimo nesukelia: ją atsveria kitos jėgos. Dedamoji F_2, nukreipta išilgai apskritimo liestinės, yra ta jėga, kurios veikiamas taškas P juda apskritimu. Jėgos F_2 didumas lygus $mg \sin \varphi$,

o jos kryptis – į tą pusę, į kurią mažėja kampas φ. Todėl matematinės švytuoklės judėjimo lygtis yra

$$ml\varphi'' = -mg\sin\varphi;$$

čia φ'' – kampinis pagreitis, $l\varphi''$ – taško P linijinis pagreitis.

Abi lygties puses padaliję iš m, gausime lygtį

$$l\varphi'' + g\sin\varphi = 0,$$

kurią ir vadinsime *matematinės švytuoklės lygtimi.*

Tą lygtį išspręsti labai sunku.

Jeigu nagrinėsime tik mažus švytuoklės svyravimus, t.y. laikysime, kad koordinatės φ modulis yra mažas, tai $\sin\varphi$ galėsime pakeisti koordinate φ. Tada gausime apytikslę lygtį

$$l\varphi'' + g\varphi = 0,$$

kurią vadinsime *matematinės švytuoklės mažų svyravimų lygtimi.* Akivaizdu, kad tai yra harmoninių svyravimų dažniu $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ lygtis. Jos bendrasis sprendinys

$$\varphi = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + \alpha\right)$$

arba

$$\varphi = C_1\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t + C_2\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Kaip ir pirmesniame skirsnyje, galima nagrinėti Koši uždavinį su atitinkamomis pradinėmis sąlygomis ir rasti jo sprendinį.

Pabrėšime, kad mažų švytuoklės svyravimų dažnis ω priklauso tik nuo švytuoklės ilgio ir, didėjant ilgiui, mažėja.

Mažų švytuoklės svyravimų per sekundę skaičius išreiškiamas formule

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}};$$

čia $g \approx 9{,}8$ m/s^2, o l – švytuoklės ilgis metrais.

Pratimai

1. Raskite harmoninių svyravimų lygtį, kurią tenkina funkcija

$$x = \sin t + \cos t.$$

2. Kuri funkcija aprašo harmoninį svyravimą:

a) $x = \sin t + \cos t$; b) $x = t\sin t$;

c) $x = \sin t + \cos 2t$; d) $x = \cos t + 1$.

3. Ilgio l matematinė švytuoklė yra pusiausvyros būsenoje. Jos pritvirtinimo taškas horizontaliai perkeliamas mažu atstumu a. Raskite švytuoklės nuokrypą.

4. Sunki vienalytė masės m ir ilgio $2\,l$ grandinėlė taip padėta ant lygaus horizontalaus stalo, kad pusė jos jau nuslydusi nuo stalo. Raskite grandinėlės slydimo lygtį ir nuslydimo laiką.

§ 38. ANTROSIOS EILĖS TIESINĖS DIFERENCIALINĖS LYGTYS SU PASTOVIAIS KOEFICIENTAIS

1. Antrosios eilės diferencialinės lygtys. Bendruoju atveju antrosios eilės diferencialinę lygtį galime užrašyti šitaip:

$$F(x;\ y;\ y';\ y'')=0, \tag{1}$$

$y=y(x)$ – ieškomoji nežinoma funkcija, $y'=y'(x)$ ir $y''=y''(x)$ atitinkamai jos pirmosios ir antrosios eilės išvestinės x atžvilgiu, o F – duotoji kintamųjų x, y', y'' funkcija.

Funkciją $\varphi(x)$, $x\in\ ]a;\ b[$, vadinsime (1) *diferencialinės lygties sprendiniu*, jeigu ji turi išvestines $\varphi'(x)$ ir $\varphi''(x)$ ir su kiekvienu $x\in]a;\ b[$ yra teisinga lygybė

$$F\big(x;\ \varphi(x);\ \varphi'(x);\ \varphi''(x)\big)=0.$$

Kitaip tariant, funkcija $\varphi(x)$, $x\in]a;\ b[$, vadinama (1) lygties sprendiniu, jeigu, vietoj y įrašius funkciją $\varphi(x)$, ta lygtis virsta tapatybe x atžvilgiu.

Diferencialinė lygtis

$$y''=f(x;\ y;\ y'), \tag{2}$$

kur f – duotoji kintamųjų x, y, y' funkcija, vadinama *lygtimi, išreikšta antrosios išvestinės atžvilgiu.* Kai funkcija f tenkina gana bendras sąlygas, galima įrodyti, kad, esant bet kokioms *pradinėms sąlygoms*

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_0', \tag{3}$$

priklausančioms funkcijos f apibrėžimo sričiai, egzistuoja vienintelis (2) lygties sprendinys $y=y(x)$, tenkinantis (3) sąlygas.

To teiginio tiksliai neformuluosime, tik pabrėšime, kad jis yra vienos iš svarbiausių diferencialinių lygčių teorijos teoremų – *Koši teoremos* – pagrindinis teiginys.

2. Tiesinės homogeninės lygtys su pastoviais koeficientais. Diferencialinę lygtį

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{1}$$

kur p ir q – kokie nors skaičiai, vadinsime *antrosios eilės tiesine diferencialine lygtimi*, o funkciją $f(x)$ – *laisvuoju nariu* arba (1) lygties *dešiniąja puse.*

Jeigu $f(x)\equiv 0$, tai diferencialinė lygtis vadinama *tiesine homogenine lygtimi* ir užrašoma šitaip:

$$y''+py'+qy=0. \tag{2}$$

Šiame skirsnyje nagrinėsime tik (2) lygtis.

1 pavyzdys. Rasime visus lygties

$$y''-y=0 \tag{3}$$

sprendinius.

Sprendimas. Nesunku įsitikinti, kad funkcijos $y=e^x$ ir $y=e^{-x}$ yra duotosios lygties sprendiniai. Įrodysime, kad su bet kuriomis konstantų C_1 ir C_2 reikšmėmis funkcija

$$y=C_1 e^x + C_2 e^{-x} \tag{4}$$

yra (3) lygties sprendinys. Kadangi

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x},$$

$$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} = y,$$

tai teiginys įrodytas.

Vadinasi, bet kuri (4) pavidalo funkcija yra (3) lygties sprendinys; kitų sprendinių ta lygtis neturi. Sakykime, $y=\varphi(x)$ yra kuris nors (3) lygties sprendinys ir, be to,

$$\varphi(0)=y_0, \quad \varphi'(0)=y_0'. \tag{5}$$

Rasime (4) pavidalo funkciją, tenkinančią tas sąlygas. Kadangi

$$\begin{cases} y_0 = C_1 + C_2, \\ y_0' = C_1 - C_2, \end{cases}$$

tai

$$C_1 = \frac{y_0+y_0'}{2}, \quad C_2 = \frac{y_0-y_0'}{2}.$$

Vadinasi, funkcija

$$y = \frac{y_0+y_0'}{2} e^x + \frac{y_0-y_0'}{2} e^{-x}$$

yra (3), (5) Koši uždavinio sprendinys.

Kadangi Koši uždavinio sprendinys yra vienintelis, tai

$$\varphi(x) = \frac{y_0+y_0'}{2} e^x + \frac{y_0-y_0'}{2} e^{-x},$$

t.y. funkciją $\varphi(x)$ gausime iš (4) funkcijos su atitinkamomis konstantų C_1 ir C_2 reikšmėmis.

Vadinasi, (4) formulė aprašo (3) lygties bendrąjį sprendinį.

2 pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$y'' - 4y = 0. \tag{6}$$

Sprendimas. Kaip ir 1 pavyzdyje, tos lygties sprendinio ieškosime pavidalu

$$y = e^{\lambda x};$$

čia λ – nežinomas skaičius. Įrašę tą funkciją į lygtį, gausime

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - 4e^{\lambda x} = 0.$$

Taigi funkcija $e^{\lambda x}$ tenkina (6) lygtį tada ir tik tada, kai λ tenkina lygtį

$$\lambda^2 - 4 = 0.$$

Tą lygtį tenkina skaičiai $\lambda_1 = 2$ ir $\lambda_2 = -2$, todėl funkcijos e^{2x} ir e^{-2x} yra (6) lygties sprendiniai (tuo galime įsitikinti ir tiesiogiai).

Dabar, kaip ir 1 pavyzdyje, galime įrodyti, kad (6) lygties bendrasis sprendinys išreiškiamas formule

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x};$$

čia C_1 ir C_2 – laisvos konstantos.

3. Charakteringoji lygtis. Remiantis išnagrinėtaisiais pavyzdžiais, kyla mintis ir bendruoju atveju ieškoti sprendinio pavidalu $e^{\lambda x}$. Sakykime, duota tiesinė homogeninė lygtis su pastoviais koeficientais

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (1)$$

Įrašę funkciją $e^{\lambda x}$ į (1) lygtį, gausime

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0.$$

Iš čia išplaukia, kad funkcija $e^{\lambda x}$ yra (1) lygties sprendinys tada ir tik tada, kai λ tenkina lygtį

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \quad (2)$$

kurią vadinsime (1) diferencialinės lygties *charakteringąja lygtimi.*

Atkreipsime dėmesį, kad charakteringąją lygtį gauname iš diferencialinės, funkciją y'' pakeitę parametru λ^2, y' pakeitę λ ir vietoj y įrašę 1.

Nagrinėsime atvejį, kai charakteringoji lygtis turi du realiuosius sprendinius λ_1 ir λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Šiuo atveju (1) lygties bendrasis sprendinys išreiškiamas formule

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad (3)$$

C_1 ir C_2 – laisvos konstantos.

Kad (3) funkcija tenkina (1) lygtį, įsitikiname betarpiškai, įrašę (3) į (1) lygtį, o iš Koši teoremos išplaukia, kad kitų sprendinių (1) lygtis neturi ((1) lygtis tenkina visas tos teoremos sąlygas).

Pavyzdys. Rasime lygties

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \quad (4)$$

bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Parašę duotosios diferencialinės lygties charakteringąją lygtį

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

ir ją išsprendę, gauname $\lambda_1 = -1$ ir $\lambda_2 = -3$. Pasinaudoję (3) formule, gauname (4) lygties bendrąjį sprendinį

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}.$$

4. Atvejis, kai charakteringoji lygtis turi kompleksinius sprendinius. Nagrinėsime tiesinę homogeninę lygtį su pastoviais koeficientais:

$$y''+py'+qy=0. \tag{1}$$

Sakykime, jos charakteringoji lygtis

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{2}$$

neturi realiųjų sprendinių. Tuomet

$$q-\frac{p^2}{4}>0.$$

Pažymėkime tą skaičių ω^2. Tada (2) lygties sprendiniai yra du jungtiniai kompleksiniai skaičiai $\lambda=\alpha+i\omega$ ir $\bar{\lambda}=\alpha-i\omega$, kur $\alpha=-\frac{p}{2}$.

Tada

$$e^{\lambda x}=e^{\alpha x}e^{i\omega x}=e^{\alpha x}(\cos\omega x+i\sin\omega x).$$

Nagrinėsime tos kompleksines reikšmes įgyjančios funkcijos realiąją ir menamąją dalis: $e^{\alpha x}\cos\omega x$, $e^{\alpha x}\sin\omega x$. Jas įrašę į (1) diferencialinę lygtį, įsitikintume, kad tos funkcijos yra (1) lygties sprendiniai. (Įsitikinkite patys!)

Kaip ir anksčiau, galime įrodyti, kad tuomet (1) lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\omega x+C_2e^{\alpha x}\sin\omega x,$$

C_1 ir C_2 – laisvos konstantos.

Pavyzdys. Išspręsime lygtį

$$y''+2y'+2y=0.$$

Sprendimas. Parašę charakteringąją lygtį

$$\lambda^2+2\lambda+2=0$$

ir ją išsprendę, gausime du jungtinius kompleksinius sprendinius $\lambda=-1+$ $+i$ ir $\bar{\lambda}=-1-i$.

Rasime realiąją ir menamąją funkcijos $e^{\lambda x}$ dalis:

$$e^{\lambda x}=e^{-x}(\cos x+i\sin x)=e^{-x}\cos x+ie^{-x}\sin x.$$

Tada, remiantis (3) formule, duotosios diferencialinės lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1e^{-x}\cos x+C_2e^{-x}\sin x.$$

Pastaba. Tam lygčių tipui priklauso harmoninių svyravimų lygtis

$$y''+\omega^2y=0.$$

Jos bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x.$$

5. Atvejis, kai charakteringoji lygtis turi tik vieną sprendinį. Sakykime, charakteringoji lygtis

$$\lambda^2+p\lambda+q=0, \tag{1}$$

atitinkanti diferencialinę lygtį

$$y''+py'+qy=0, \tag{2}$$

turi tik vieną šaknį $\lambda=\alpha$, kuri yra antro kartotinumo. Tada $p=-2\alpha$, $q=\alpha^2$. Kaip ir anksčiau, nesunkiai įsitikintume, kad funkcija $e^{\alpha x}$ yra (2) lygties sprendinys. Įrodysime, kad tuomet funkcija $xe^{\alpha x}$ yra (2) lygties sprendinys. Turime:

$$y=xe^{\alpha x}, \quad y'=e^{\alpha x}+\alpha xe^{\alpha x}, \quad y''=2\alpha e^{\alpha x}+\alpha^2 xe^{\alpha x},$$

todėl

$$y''+py'+qy=2\alpha e^{\alpha x}+\alpha^2 xe^{\alpha x}+pe^{\alpha x}+p\alpha xe^{\alpha x}+qxe^{\alpha x}=$$

$$=e^{\alpha x}(2\alpha+p)+xe^{\alpha x}(\alpha^2+p\alpha+q)=e^{\alpha x}(2\alpha-2\alpha)+xe^{\alpha x}(\alpha^2-2\alpha^2+\alpha^2)=0.$$

Vadinasi, funkcijos $e^{\alpha x}$ ir $xe^{\alpha x}$ yra (2) lygties sprendiniai, todėl bet kuri funkcija

$$y=C_1e^{\alpha x}+C_2xe^{\alpha x} \tag{3}$$

taip pat yra (2) lygties sprendinys. Iš Koši teoremos išplaukia, kad kitų sprendinių ta lygtis neturi.

Pavyzdys. Rasime lygties

$$y''+2y'+y=0$$

bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Charakteringoji lygtis turi tik vieną sprendinį $\lambda=1$. Todėl (žr. (3) formulę) duotosios diferencialinės lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1e^x+C_2xe^x,$$

C_1 ir C_2 – laisvos konstantos.

6. Tiesinės nehomogeninės lygtys. Padarysime keletą pastabų apie tiesines nehomogenines diferencialines lygtis

$$y''+py'+qy=f(x). \tag{1}$$

Kaip ir pirmosios eilės tiesinių diferencialinių lygčių, (1) lygties bendrasis sprendinys yra kurio nors jos atskirojo sprendinio ir atitinkamos homogeninės lygties

$$y''+py'+qy=0 \tag{2}$$

bendrojo sprendinio suma.

Remdamiesi ta pastaba, išnagrinėsime du pavyzdžius.

1 pavyzdys. Rasime lygties

$$y''+2y'-3y=1 \tag{3}$$

bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Tikrindami, įsitikiname, kad funkcija $y=-\frac{1}{3}$ yra (3) lygties atskirasis sprendinys. Dabar rasime tiesinės homogeninės lygties

$$y''+2y'-3y=0 \tag{4}$$

bendrąjį sprendinį.

Charakteringoji lygtis

$$\lambda^2+2\lambda-3=0$$

turi sprendinius $\lambda_1=-3$ ir $\lambda_2=1$. Vadinasi, (4) lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x.$$

Kadangi nehomogeninės lygties bendrasis sprendinys yra kurio nors jos atskirojo sprendinio ir atitinkamos homogeninės lygties bendrojo sprendinio suma, tai (3) lygties bendrasis sprendinys yra

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x-\frac{1}{3}.$$

2 pavyzdys. Rasime lygties

$$y''+2y'-3y=x \tag{5}$$

bendrąjį sprendinį.

Sprendimas. Ieškosime (5) lygties atskirojo sprendinio pavidalu

$$y=Ax+B,$$

A ir B – nežinomi skaičiai. Įrašę tą funkciją į (5) lygtį, gausime

$$2A-3Ax-3B=x.$$

Iš tos lygybės išplaukia, kad

$$\begin{cases} 2A-3B=0, \\ -3A=1, \end{cases}$$

todėl

$$A=-\frac{1}{3}, \quad B=-\frac{2}{9}.$$

Vadinasi, funkcija

$$y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}$$

yra (5) lygties atskirasis sprendinys, o jos bendrasis sprendinys (žr. 1 pavyzdį) yra

$$y=C_1e^{-3x}+C_2e^x-\frac{1}{3}x-\frac{2}{9}.$$

Tuo ir baigsime diferencialinių lygčių nagrinėjimą.

Pratimai

Išspręskite lygtis:

1. $x'' - 2x' = 0.$ **2.** $x'' + 5x' + 6x = 0.$

3. $3x'' - 2x' - 8x = 0.$ **4.** $x'' + 4x' + 13x = 0.$

5. $x'' + x' + x = 0.$ **6.** $x'' - 6x' + 9x = 0.$

7. $x'' - x = 2.$ **8.** $x'' + 2x' = 2.$

9. $x'' + 9x = 9.$ **10.** $x'' - 2x' - 3x = e^{4t}.$

11. $x'' - 3x' + 2x = \sin t.$ **12.** $x'' + x = 4 \sin t.$

Raskite lygčių sprendinius, tenkinančius duotąsias pradines sąlygas:

13. $x'' - 3x' + 2x = 0,$ $x(0) = 2,$ $x'(0) = 3.$

14. $x'' + 2x' + 5x = 0,$ $x(0) = x'(0) = 1.$

15. $x'' + 6x' + 9x = 0,$ $x(0) = 2,$ $x'(0) = 1.$

16. $x'' + 2x' + 2x = 0,$ $x(0) = a,$ $x'(0) = b.$

17. $x'' - x' - 6x = 2,$ $x(0) = 1,$ $x'(0) = 0.$

18. $x'' - 9x = 2 - t,$ $x(0) = 0,$ $x'(0) = 1.$

19. $x'' + 4x = 2 \cos 2t,$ $x(0) = 0,$ $x(0) = 4.$

20. Raskite tokias α ir β reikšmes, kad visi lygties

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 0$$

sprendiniai būtų periodinės funkcijos.

21. Kokios turi būti α reikšmės, kad lygtis

$$x'' + \alpha x = 0$$

turėtų sprendinius, tenkinančius sąlygas

$$x(0) = x(\pi) = 0?$$

IX SKYRIUS

Skaitinės ir laipsninės eilutės

§ 39. SKAITINĖS EILUTĖS

1. Eilutės ir jos sumos apibrėžimas. Sakykime, duota skaičių seka a_n, $n \in N$. Tada seką

$$S_n = a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad n \in N, \tag{1}$$

vadinsime *skaitine eilute* ir žymėsime

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \text{ arba } \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2}$$

Skaičius $a_1, a_2, \ldots$ vadinsime (2) *eilutės nariais*, atitinkamai pirmuoju, antruoju ir t.t.; skaičių a_n vadinsime n-uoju arba *bendruoju* (2) *eilutės nariu*.

Sumas $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2, \ldots, S_n = a_1 + \ldots + a_n, \ldots$ vadinsime (2) *eilutės dalinėmis sumomis*.

Eilutę

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \tag{3}$$

vadinsime (2) *eilutės n-ąja liekana*. Atkreipsime dėmesį, kad (3) eilutės pirmasis narys yra $(n+1)$-asis (2) eilutės narys ir (3) eilutės k-asis narys yra a_{n+k}.

Remiantis apibrėžimu, eilutės – tai ypatinga sekų rūšis, todėl galima kalbėti apie eilučių konvergavimą ir divergavimą.

Eilutę vadinsime *konverguojančia*, jeigu jos dalinių sumų seka konverguoja, ir *diverguojančia*, jeigu eilutės dalinių sumų seka diverguoja. Vadinasi, (2) eilutę vadinsime konverguojančia, jeigu egzistuoja riba

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Tą ribą vadinsime (2) *eilutės suma*.

Jeigu (2) eilutė konverguoja ir S yra jos suma, tai rašysime

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

1 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ ir įrodysime, kad ji konverguoja, kai $|q|<1$, ir diverguoja, kai $|q|\geqslant 1$.

Tą eilutę jau nagrinėjome, ieškodami geometrinės progresijos sumos (žr. „Algebros" I dalį, § 11, 9 skirsnį). Priminsime, kad

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} q^k=\frac{q-q^{n+1}}{1-q}, \text{ imant visus } n\in N.$$

Jeigu $|q|<1$, tai $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}=0$, todėl

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{q-q^{n+1}}{1-q}=\frac{q}{1-q}.$$

Vadinasi, jeigu $|q|<1$, tai duotoji eilutė konverguoja ir

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n=\frac{q}{1-q}.$$

Jeigu $|q|>1$, tai $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^{n+1}=+\infty$, todėl seka (q^{n+1}) nėra aprėžta, taigi ji neturi ribos. Iš čia išplaukia, kad seka (S_n) taip pat neturi ribos, t.y. duotoji eilutė diverguoja, kai $|q|>1$.

Sakykime, $|q|=1$. Jeigu $q=1$, tai

$$S_1=1,\ S_2=2,\ \ldots,\ S_n=n,\ \ldots$$

ir, kaip nesunku matyti, duotoji eilutė diverguoja.

Jeigu $q=-1$, tai

$$S_1=-1,\ S_2=-1+1=0,\ S_3=-1,\ \ldots,$$

t.y. dalinės sumos su nelyginiais numeriais lygios -1, o su lyginiais numeriais -0. Tokia seka ribos neturi. Taigi, kai $|q|=1$, duotoji eilutė diverguoja.

1 teorema. *Jeigu eilutė konverguoja, tai ir bet kuri jos liekana konverguoja. Jeigu kuri nors eilutės liekana konverguoja, tai ir duotoji eilutė konverguoja.*

Įrodymas. Sakykime, duota eilutė $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Nagrinėsime kurią nors jos liekaną, t.y. eilutę $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}$. Su bet kokiu n

$$S_{N+n}=\sum_{k=1}^{n+N} a_k=\sum_{k=1}^{N} a_k+\sum_{k=N+1}^{n+N} a_k=S_N+\sum_{k=1}^{n} a_{N+k}=S_N+S_n^*,$$

S_n^* – duotosios eilutės N-osios liekanos n-oji dalinė suma. Jeigu eilutė konverguoja ir jos suma yra S, tai iš čia išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty} S_n^*=\lim_{n\to\infty}(S_{N+n}-S_N)=$$
$$=\lim_{n\to\infty} S_{N+n}-S_N=\lim_{n\to\infty} S_n-S_N=S-S_N,$$

taigi eilutės N-oji liekana konverguoja. Atvirkščiai, jeigu eilutės N-oji liekana konverguoja ir jos suma yra R_N, tai

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{N+n}=\lim_{n\to\infty}(S_N+S_n^*)=S_N+\lim_{n\to\infty} S_n^*=S_N+R_N.$$

Taigi eilutė konverguoja. 1 teorema įrodyta.

Jeigu duotosios eilutės suma yra S, tai iš 1 teoremos įrodymo išplaukia:

$$S=S_N+R_N,$$

S_N — N-oji dalinė suma, o R_N — duotosios eilutės N-osios liekanos suma.

2 teorema. *Jeigu eilutės, kurių bendrieji nariai yra a_n ir b_n, konverguoja ir*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n=B,$$

tai, imant bet kokius skaičius α ir β, eilutė su bendruoju nariu $c_n=\alpha a_n+\beta b_n$ konverguoja ir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha A+\beta B.$$

Iš tikrųjų,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_k+\beta b_k)=\lim_{n\to\infty}\left(\alpha\sum_{k=1}^{n} a_k+\beta\sum_{k=1}^{n} b_k\right)=$$
$$=\alpha\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k+\beta\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k=\alpha A+\beta B,$$

tai ir reiškia, kad eilutė su bendruoju nariu $C_n=\alpha a_n+\beta b_n$ konverguoja ir jos suma lygi $\alpha A+\beta B$.

2 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2\cdot 3^{-n}+3\cdot 2^{1-n}).$$

kurios bendrasis narys yra

$$c_n=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+3\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

Kaip įrodėme 1 pavyzdyje, eilutės su bendraisiais nariais $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ir $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ konverguoja ir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Remiantis 2 teorema, duotoji eilutė konverguoja ir

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2\cdot 3^{-n}+3\cdot 2^{1-n})=2\cdot\frac{1}{2}+6=7.$$

3 teorema (būtina eilutės konvergavimo sąlyga). *Jeigu eilutė su bendruoju nariu a_n konverguoja, tai $a_n\to 0$, kai $n\to\infty$.*

Įrodymas. Sakykime, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja ir jos suma yra S. Tada

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n-1} a_k=S_n-S_{n-1},$$

imant kiekvieną $n\geqslant 2$, todėl

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S-S=0.$$

3 teorema įrodyta.

3 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Ta eilutė netenkina būtinos konvergavimo sąlygos.
Iš tikrųjų,

$$a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{n-1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n+1}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n+1}=$$

$$=\frac{1-\frac{1}{n}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}},$$

taigi (žr. „Algebros“ I dalį, § 11, 8 skirsnį)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}.$$

Vadinasi, duotoji eilutė diverguoja.

4 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Tą eilutę vadinsime *harmonine* ir įrodysime, kad ji diverguoja. Kadangi

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx < \frac{1}{k}, \quad \text{imant visus} \quad k \in N,$$

tai

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x}, \quad \text{imant visus } n \in N.$$

Kadangi

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^{n+1} = \ln(n+1),$$

tai

$$S_n > \ln(n+1), \quad \text{imant visus} \quad n \in N,$$

ir todėl $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, t.y. harmoninė eilutė diverguoja.

Remiantis išnagrinėtuoju pavyzdžiu, iš sąlygos $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ neišplaukia, jog eilutė su bendruoju nariu a_n konverguoja. Ta sąlyga yra būtina, bet nėra pakankama, kad eilutė konverguotų.

2. Neneigiamų narių eilutės. Pirmiausia pabrėšime, kad bet kokios neneigiamų narių eilutės dalinių sumų seka yra nemažėjanti. Sakykime, duota eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kurios nariai yra neneigiami: $a_n \geqslant 0$. Tada

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} a_k = S_{n+1}, \quad \text{imant visus } n.$$

Jeigu nemažėjanti seka yra aprėžta, tai žinome (žr. „Algebros“ I dalį, § 11, 8 skirsnį), kad ji turi baigtinę ribą. Jeigu ji nėra aprėžta, tai ji yra neaprėžtai didėjanti (žr. „Algebros“ I dalį, § 11, 7 skirsnį); apie tokią seką sakome, kad ji diverguoja prie $+\infty$. Todėl, jeigu neneigiamų narių eilutė diverguoja, tai sakoma, kad ji diverguoja prie $+\infty$ ir jos suma yra $+\infty$. Vadinasi, teisinga šitokia teorema.

1 teorema. *Jeigu neneigiamų narių eilutės dalinių sumų seka yra aprėžta, tai eilutė konverguoja. Jeigu neneigiamų narių eilutės dalinių sumų seka nėra aprėžta, tai eilutė diverguoja prie* $+\infty$.

1 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{1}$$

Įrodysime, kad (1) eilutė konverguoja, kai $\alpha > 1$. Imant bet kokį $n \geqslant 2$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \int_{k-1}^{k} dx < 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^{\alpha}} =$$

$$= 1 + \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^{\alpha}} = 1 + \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^n < 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1},$$

todėl, remiantis 1 teorema, (1) eilutė konverguoja, kai $\alpha > 1$.

Ankstesniame skirsnyje įrodėme, kad, kai $\alpha = 1$, (1) eilutė diverguoja. Įrodysime, kad ji diverguoja, imant bet kokį $\alpha \leqslant 1$. Kadangi (žr. 1 skirsnį, 4 pavyzdį)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(1+n),$$

tai $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Taigi (1) eilutė konverguoja, kai $\alpha > 1$, ir diverguoja prie $+\infty$, kai $\alpha \leqslant 1$.

2 teorema (palyginimo požymis). *Sakykime, eilutės* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ir* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *tenkina šią sąlygą: egzistuoja toks* N, *kad* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, *kai* $n \geqslant N$. *Tada, jeigu eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguoja, tai ir eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguoja. Jeigu eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguoja, tai ir eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverguoja.*

Įrodymas. Jeigu eilutė $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konverguoja, tai konverguoja ir jos liekana $\sum_{k=N}^{\infty} b_k$ (žr. 1 skirsnį, 1 teoremą). Sakykime, $B = \sum_{k=N}^{\infty} b_k$, tada

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=N}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} b_k = B,$$

kai $n \geqslant N$, t.y. eilutės $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ dalinių sumų seka yra aprėžta. Kadangi, be to, $a_k \geqslant 0$, kai $k \geqslant N$, tai, remiantis 1 teorema, eilutė $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konverguoja. Vadinasi, konverguoja ir eilutė $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (žr. 1 skirsnį, 1 teoremą).

Jeigu eilutė su bendruoju nariu a_n diverguoja, tai eilutė su bendruoju nariu b_n negali konverguoti: jeigu ji konverguotų, tai konverguotų ir eilutė su bendruoju nariu a_n.

Taigi 2 teorema įrodyta.

2 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$, x – kuris nors realusis skaičius.

Kadangi $0 \leqslant \frac{\sin^2 nx}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ su visais n ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguoja (žr. 1 pavyzdį), tai, remiantis palyginimo požymiu, duotoji eilutė konverguoja su bet kokiu $x \in \boldsymbol{R}$.

3 pavyzdys. Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ diverguoja, nes $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ su visais $n \geqslant 3$, ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguoja.

Lema. *Sakykime, duota neneigiamų narių eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Jeigu egzistuoja toks* q, *kad*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1, \text{ imant visus } n, \tag{2}$$

tai eilutė konverguoja. Jeigu

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1, \text{ imant visus } n, \tag{3}$$

tai eilutė diverguoja.

Įrodymas. Jeigu išpildyta (2) sąlyga, tai

$$a_{n+1} \leqslant q a_n \leqslant q^2 a_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant a_1 q^n.$$

Taigi

$$a_n \leqslant a_1 q^{n-1} \text{ su visais } n.$$

Kadangi eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, kurios $0<q<1$, konverguoja, tai, remiantis palyginimo požymiu, duotoji eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taip pat konverguoja. Pirmąją lemos dalį įrodėme.

Jeigu išpildyta (3) sąlyga, tai

$$a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant \ldots \geqslant a_1,$$

t.y. $a_n \geqslant a_1 > 0$, imant visus n. Iš čia išplaukia, kad nėra išpildyta būtina konvergavimo sąlyga, ir todėl eilutė diverguoja.

Lemą įrodėme.

3 teorema (Dalambero požymis). *Sakykime, teigiamų narių eilutei su bendruoju nariu a_n yra išpildyta sąlyga*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Tada eilutė konverguoja, kai $q<1$, ir diverguoja, kai $q>1$.

Įrodymas. Iš sekos ribos apibrėžimo išplaukia, kad kiekvienam $\varepsilon>0$ galima rasti tokį N, kad būtų

$$q-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon, \quad \text{imant visus } n \geqslant N.$$

Jeigu $q<1$, tai, išrinkę $\varepsilon>0$ taip, kad būtų $q+\varepsilon<1$, gausime

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon < 1 \quad \text{su visais } n \geqslant N,$$

t.y. N-oji duotosios eilutės liekana tenkina lemos (2) sąlygą. Vadinasi, eilutė konverguoja.

Jeigu $q>1$, tai, išrinkę $\varepsilon>0$ taip, kad būtų $q-\varepsilon>1$, gausime

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q-\varepsilon > 1 \quad \text{su visais } n \geqslant N,$$

t.y. N-oji eilutės liekana tenkina lemos (3) sąlygą. Vadinasi, eilutė diverguoja.

Taigi 3 teorema įrodyta.

4 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Kadangi $a_n = \frac{n}{2^n}$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Remiantis Dalambero požymiu, duotoji eilutė konverguoja.

5 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$.

Kadangi $a_n = \frac{10^n}{n!}$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10^{n+1} \cdot n!}{(n+1)!\,10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{n+1} = 0.$$

Remiantis Dalambero požymiu, duotoji eilutė konverguoja.

3. Absoliučiai ir reliatyviai konverguojančios eilutės. Svarbią konverguojančių eilučių klasę sudaro vadinamosios absoliučiai konverguojančios eilutės. Prieš apibrėždami atitinkamą sąvoką, įrodysime šią teoremą.

1 teorema. *Jeigu eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *konverguoja, tai konverguoja ir eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Įrodymas. Apibrėšime

$$p_n = \frac{|a_n| + a_n}{2}, \quad q_n = \frac{|a_n| - a_n}{2}.$$

Akivaizdu, kad

$$0 \leqslant p_n \leqslant |a_n|, \quad 0 \leqslant q_n \leqslant |a_n|, \quad \text{imant visus } n.$$

Remiantis palyginimo požymiu, eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ konverguoja. Kadangi $a_n = p_n - q_n$, tai (žr. 1 skirsnį, 2 teoremą) duotoji eilutė taip pat konverguoja. Taigi 1 teorema įrodyta.

1 apibrėžimas. Jeigu eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguoja, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vadinama *absoliučiai konverguojančia.*

Jeigu eilutė konverguoja absoliučiai, tai pagal 1 teoremą ji konverguoja ir paprastai.

Norėdami nustatyti, ar eilutė konverguoja absoliučiai, galime remtis visais neneigiamų narių eilučių konvergavimo požymiais.

2 teorema. *Sakykime, eilutei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *yra išpildyta sąlyga*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q.$$

Tada eilutė konverguoja, kai $q < 1$, *ir diverguoja, kai* $q > 1$.

Įrodymas. Jeigu $q < 1$, tai, remiantis Dalambero požymiu, teigiamų narių eilutė konverguoja. Jeigu $q > 1$, tai nėra išpildyta būtina eilutės kon-

vergavimo sąlyga (žr. 2 skirsnio lemos įrodymo pabaigą) ir todėl eilutė diverguoja.

Taigi 2 teoremą įrodėme.

1 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$, $\alpha>1$.

Ta eilutė konverguoja ir, be to, konverguoja absoliučiai. Iš tikrųjų,

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}, \quad |a_n| = \frac{1}{n^{\alpha}}.$$

Kadangi eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguoja, kai $\alpha>1$, tai duotoji eilutė konverguoja absoliučiai ir, žinoma, ji konverguoja.

2 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$; čia $\alpha>1$, x – bet koks realusis skaičius.

Ta eilutė konverguoja absoliučiai, nes

$$\left|\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{n^{\alpha}} \quad \text{su visais } n$$

ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konverguoja, kai $\alpha>1$.

3 pavyzdys. Eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^{\alpha}}$, $0<\alpha\leqslant 1$, nėra absoliučiai konverguojanti, nes eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, kai $\alpha\leqslant 1$, diverguoja. Vėliau įrodysime, kad duotoji eilutė konverguoja, paėmus bet kokį $\alpha>0$.

3 teorema (Leibnico požymis). *Jeigu teigiamų skaičių seka* (a_n) *monotoniškai mažėja ir* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *tai eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *konverguoja.*

Įrodymas. Nagrinėsime duotosios eilutės dalinių sumų su lyginiais numeriais seką:

$$S_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} a_k, \quad m \in N.$$

Kadangi

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2m-1} - a_{2m} = \sum_{k=1}^{m} (a_{2k-1} - a_{2k})$$

ir, remiantis sąlyga, $a_{2k-1}-a_{2k}>0$, tai seka S_{2m}, $m\in N$, monotoniškai didėja. Be to,

$$S_{2m}=a_1-(a_2-a_3)-\ldots-a_{2m}<a_1 \quad \text{su visais } m,$$

t.y. nagrinėjamoji seka yra aprėžta, todėl ji turi ribą. Sakykime,

$$S=\lim_{m\to\infty} S_{2m}. \tag{1}$$

Nagrinėjant dalines sumas su nelyginiais numeriais,

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}(S_{2m}-a_{2m})=\lim_{m\to\infty} S_{2m}-\lim_{m\to\infty} a_{2m}=S. \tag{2}$$

Iš (1) ir (2) išplaukia, kad duotoji eilutė konverguoja ir jos suma lygi S. Taigi (3) teoremą įrodėme.

Iš Leibnico požymio išplaukia, kad eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

konverguoja, imant kiekvieną $\alpha>0$. Tačiau, kai $0<\alpha\leqslant 1$, ji absoliučiai nekonverguoja.

2 apibrėžimas. Eilutė vadinama *reliatyviai konverguojančia*, jeigu ji konverguoja, tačiau neabsoliučiai.

Pavyzdžiui, abi eilutės

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

konverguoja. Pirmoji eilutė konverguoja absoliučiai, o antroji absoliučiai nekonverguoja, taigi ji konverguoja reliatyviai.

Absoliučiai konverguojančios eilutės pasižymi daugeliu baigtinių sumų savybių. Pavyzdžiui, jos pasižymi savybe, analogiška komutatyvumo savybei: absoliučiai konverguojančios eilutės suma nekinta, bet kaip sukeitus vietomis jos narius.

Absoliučiai konverguojančias eilutes galima panariui sudauginti. Tiksliau tą teiginį suformuluosime šitaip: jeigu eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguoja absoliučiai ir $A=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $B=\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tai eilutė, kurios nariai yra visos galimos sandaugos $a_k b_n$, konverguoja taip pat absoliučiai, ir jos suma lygi sandaugai AB.

4. Kompleksinių narių sekos ir eilutės. Sakykime, duota kompleksinių skaičių seka

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots \tag{1}$$

Šią seką, kaip ir realiųjų skaičių seką, žymėsime (z_n).

1 apibrėžimas. Kompleksinį skaičių z vadinsime sekos (z_n) riba, jeigu

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0,$$

$|z_n - z|$ – kompleksinio skaičiaus $z_n - z$ modulis.

Seka, turinti ribą, vadinama konverguojančia.

Jeigu skaičius z yra sekos (z_n) riba, tai rašysime $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ arba $z_n \to z$, kai $n\to\infty$, ir sakysime, kad seka (z_n) konverguoja į z.

1 teorema. *Kompleksinių skaičių $z_n = a_n + ib_n$, $n\in N$, seka konverguoja tada ir tik tada, kai konverguoja jų realiųjų ir menamųjų dalių sekos. Tada*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a_n + i\lim_{n\to\infty} b_n.$$

Įrodymas. Sakykime,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Įrodysime, kad tada $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$; čia $z = a + ib$. Kadangi

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$$

ir $|a_n - a| \to 0$, $|b_n - b| \to 0$, kai $n\to\infty$, tai $|z_n - z| \to 0$, kai $n\to\infty$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Jeigu $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, $z = a + ib$, tai iš nelygybių

$$|a_n - a| \leqslant |z_n - z|, \quad |b_n - b| \leqslant |z_n - z|$$

išplaukia, kad $|a_n - a| \to 0$ ir $|b_n - b| \to 0$, kai $n\to\infty$, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

1 teorema įrodyta.

Iš 1 teoremos ir atitinkamų teoremų realiųjų skaičių sekoms išplaukia šie kompleksinių skaičių sekų teiginiai.

1 išvada. *Konverguojanti seka turi vienintelę ribą.*

2 išvada. *Jeigu sekos (z_n) ir (w_n) konverguoja, tai sumos $(z_n + w_n)$ riba yra lygi ribų sumai:*

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$$

skirtumo $(z_n - w_n)$ riba yra lygi ribų skirtumui:

$$\lim_{n\to\infty} (z_n - w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} w_n,$$

sandaugos $(z_n w_n)$ riba yra lygi ribų sandaugai

$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n.$$

Jeigu, be to, $z_n \neq 0$ *ir* $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, *tai dalmens* $\left(\frac{w_n}{z_n}\right)$ *riba yra lygi ribų dalmeniui:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{w_n}{z_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} w_n}{\lim_{n\to\infty} z_n} .$$

Kaip ir **1** skirsnyje, galima apibrėžti kompleksinių narių eilutes $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, kurioms būtų teisingi visi 1 skirsnio apibrėžimai ir teoremos. Pavyzdžiui, kompleksinių narių eilutėms yra teisinga šitokia ***būtina konvergavimo sąlyga***.

Jeigu eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *konverguoja, tai* $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

1 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$, z – koks nors kompleksinis skaičius.

Jeigu $|z| \geqslant 1$, tai duotoji eilutė netenkina būtinos konvergavimo sąlygos:

$$|z^n| = |z|^n \geqslant 1 \quad \text{su visais } n,$$

ir todėl eilutė diverguoja.

Jeigu $|z| < 1$, tai eilutė konverguoja. Iš tikrųjų, n-ajai dalinei sumai teisinga formulė

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z - z^{n+1}}{1-z} ,$$

todėl

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{z}{1-z} - \frac{z}{1-z} \lim_{n\to\infty} z^n .$$

Kadangi $|z^n| = |z|^n \to 0$, kai $n \to \infty$, tai $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$, ir todėl

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z}{1-z} .$$

Vadinasi, jeigu $|z| < 1$, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ konverguoja ir

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1-z} .$$

Jeigu $|z| \geqslant 1$, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ diverguoja.

2 teorema. *Sakykime, duota kompleksinių narių eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. *Jeigu modulių eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ *konverguoja, tai konverguoja ir eilutė* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Įrodymas. Sakykime, $u_n = a_n + ib_n$, taigi $|u_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$. Kadangi $|a_n| \leqslant |u_n|$, $|b_n| \leqslant |u_n|$, ir eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ konverguoja, tai, remiantis palyginimo požymiu, eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguoja absoliučiai. Sakykime,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$

Tada, remiantis 1 teorema,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + i \sum_{k=1}^{n} b_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k + i \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = A + iB.$$

Taigi teorema įrodyta.

Pabrėšime, kad, kaip ir anksčiau, eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ vadinsime *absoliučiai konverguojančia*, jeigu konverguoja eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. Taigi 2 teorema tvirtina, kad kompleksinių narių eilutė konverguoja paprastai, jeigu ji konverguoja absoliučiai.

2 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, z — koks nors kompleksinis skaičius.

Čia

$$u_n = \frac{z^n}{n!}, \quad |u_n| = \frac{|z|^n}{n!}.$$

Įrodysime, kad realiųjų narių eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ konverguoja su bet kokiu z.

Jeigu $z=0$, tai $u_n=0$, o nulių eilutė konverguoja. Jeigu $z\neq 0$, tai $|z|>0$ ir eilutei galima taikyti Dalambero požymį. Tada

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z|}{n+1}=0$$

su kiekvienu kompleksiniu $z\neq 0$. Todėl eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ konverguoja.

Vadinasi, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ konverguoja absoliučiai su bet kokiu kompleksiniu skaičiumi z.

P r a t i m a i

1. Raskite šių eilučių sumas:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{10^n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^n}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{10^{2n}}+\frac{50}{10^{2n+1}}\right)$.

2. Nustatykite, ar šios eilutės konverguoja, ar diverguoja:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1000n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

3. Remdamiesi palyginimo požymiu, nustatykite, ar šios eilutės konverguoja, ar diverguoja:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$; b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}-1}$;

c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

4. Remdamiesi Dalambero požymiu, nustatykite, ar šios eilutės konverguoja, ar diverguoja:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n}$.

5. Nustatykite, kurios eilutės konverguoja reliatyviai, o kurios – absoliučiai:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2n-1}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n!}$; d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$.

§ 40. LAIPSNINĖS EILUTĖS

1. Laipsninės eilutės konvergavimo spindulys ir konvergavimo skritulys. Šiame paragrafe nagrinėsime eilutes

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \tag{1}$$

kur $z_0, a_0, a_1, \ldots, a_n \ldots$ – duotieji kompleksiniai skaičiai, z – kintamasis, kurio reikšmės – bet kokie kompleksiniai skaičiai.

Tokias eilutes vadinsime *laipsninėmis*, o skaičius $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ – (1) *laipsninės eilutės koeficientais.* (1) eilutės bendrasis narys

$$u_n = a_n (z-z_0)^n$$

yra z funkcija ir su kiekviena fiksuota kintamojo z reikšme jis yra koks nors kompleksinis skaičius. Taigi su kiekviena kintamojo z reikšme (1) eilutė yra skaičių eilutė.

Atkreipsime dėmesį, kad laipsninės eilutės nariai sunumeruoti ne nuo vieneto, bet nuo nulio: pirmasis narys vadinamas nuliniu, antrasis – pirmuoju ir t.t. Kai eilutė yra laipsninė, tokia numeracija natūrali, nes nulinis narys u_0 yra koeficiento a_0 ir nulinio laipsnio polinomo $(z-z_0)^0=1$ sandauga, pirmasis narys u_1 yra koeficiento a_1 ir polinomo $z-z_0$ sandauga ir apskritai *n-asis narys u_n yra koeficiento a_n ir n-ojo laipsnio polinomo $(z-z_0)^n$ sandauga.*

Kadangi tarp koordinačių plokštumos taškų ir kompleksinių skaičių yra abipus vienareikšmė atitiktis, tai dažnai vietoj „kompleksinis skaičius z“ sakysime „taškas z“. Vadinasi, jeigu (1) eilutė konverguoja, kai $z=z_1$, tai sakysime, kad duotoji laipsninė eilutė konverguoja taške z_1.

Visų taškų z, kuriuose eilutė konverguoja, aibę vadinsime *konvergavimo sritimi*. Pabrėšime, kad bet kokia laipsninė eilutė (1) konverguoja taške z_0, taigi bet kokios laipsninės eilutės konvergavimo sritį sudaro bent vienas taškas. Daugiau sužinosime apie laipsninės eilutės konvergavimo sritį iš svarbios teoremos, vadinamos norvegų matematiko N. Abelio (1802—1829) vardu.

1 teorema. *Jeigu* (1) *laipsninė eilutė konverguoja taške* $z_1 \neq z_0$, *tai ji absoliučiai konverguoja bet kuriame tokiame taške* z, *kad* $|z-z_0|<|z_1-z_0|$. *Jeigu* (1) *eilutė diverguoja taške* z_1, *tai ji diverguoja bet kuriame taške* z, *tenkinančiame nelygybę* $|z-z_0|>|z_1-z_0|$

Kitaip tariant, jeigu (1) laipsninė eilutė konverguoja taške $z_1 \neq z_0$, tai ji absoliučiai konverguoja bet kuriame skritulio $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ taške z. Jeigu (1) eilutė diverguoja taške z_1, tai ji diverguoja bet kuriame taške, kuris yra skritulio $|z-z_0|\leqslant|z_1-z_0|$ išorėje. Apie apskritimo $|z-z_0|=|z_1-z_0|$ taškus Abelio teoremoje nieko nepasakyta.

Įrodymas. Jeigu skaičių eilutė

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1-z_0)^n$$

konverguoja, tai jos bendrasis narys yra aprėžtas.

Sakykime, $|a_n (z_1-z_0)^n|\leqslant M$, imant visus n. Jeigu $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, tai

$$|a_n (z-z_0)^n| = |a_n (z_1-z_0)^n| \cdot \left(\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}\right)^n \leqslant M \cdot q^n;$$

čia $q=\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|}<1$. Palyginę su geometrine progresija, gauname, kad bet kuriame skritulio $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ taške z eilutė konverguoja.

Sakykime, eilutė $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z_1-z_0)^n$ diverguoja. Tada (1) eilutė diverguoja bet kuriame taške z_2, tenkinančiame nelygybę $|z_2-z_0|>|z_1-z_0|$. Jeigu eilutė konverguotų taške z_2, tai, remiantis įrodytuoju teiginiu, ji turėtų konverguoti ir taške z_1. 1 teorema įrodyta.

Iš Abelio teoremos išplaukia, kad, turint (1) laipsninę eilutę, galimi trys atvejai:

1) (1) eilutė konverguoja tik taške z_0;

2) (1) eilutė konverguoja visuose taškuose z;

3) egzistuoja toks skaičius $R>0$, kad visuose skritulio $|z-z_0|<R$ taškuose z eilutė konverguoja, o visuose taškuose z, $|z-z_0|>R$, eilutė diverguoja.

1 apibrėžimas. Tokį skaičių $R>0$, kad (1) eilutė konverguoja visuose taškuose z, tenkinančiuose nelygybę $|z-z_0|<R$, ir diverguoja visuose taškuose z, tenkinančiuose nelygybę $|z-z_0|>R$, vadiname (1) *eilutės konvergavimo spinduliu.* Jeigu (1) eilutė konverguoja tik taške z_0, tai $R=0$. Jeigu (1) eilutė konverguoja kiekviename taške z, tai $R=+\infty$.

Vadinasi, kiekviena laipsninė eilutė turi konvergavimo spindulį R, kuris, remiantis apibrėžimu, tenkina nelygybę $0\leqslant R\leqslant +\infty$.

2 apibrėžimas. Aibę visų taškų z, tenkinančių nelygybę $|z-z_0|<R$, R – (1) eilutės konvergavimo spindulys, vadinsime (1) *eilutės konvergavimo skrituliu.*

Atkreipsime dėmesį: jeigu $0<R<+\infty$, tai (1) eilutės konvergavimo skritulys – atviras skritulys su spinduliu R ir centru taške z_0. Jeigu $R=+\infty$, tai konvergavimo skritulys yra kompleksinė plokštuma. Jeigu $R=0$, tai konvergavimo skritulys yra tuščioji aibė.

2 teorema. *Jeigu* (1) *laipsninę eilutę atitinkanti seka* $\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}\right)$ *turi baigtinę arba begalinę ribą, tai konvergavimo spindulys yra*

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}. \tag{2}$$

Įrodymas. Sakykime,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=A.$$

Iš pradžių nagrinėsime atvejį, kai $0<A<+\infty$. Paėmę kurį nors $z_1\neq z_0$, skaičių eilutei $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|z_1-z_0|^n$ taikysime Dalambero požymį. Kadangi $u_n=|a_n|\cdot|z_1-z_0|^n$, tai

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|\cdot|z_1-z_0|^{n+1}}{|a_n|\cdot|z_1-z_0|^n}=$$

$$=|z_1-z_0|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|z_1-z_0|\cdot\frac{1}{A}.$$

Jeigu $\frac{1}{A}|z_1-z_0|<1$, tai (1) eilutė konverguoja absoliučiai, jeigu $\frac{1}{A}|z_1-z_0|>1$, tai eilutė diverguoja. Taigi $R=A$.

Jeigu $A=+\infty$, tai $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$ su bet kokiu $z\neq z_0$, todėl eilutė konverguoja su bet kokiu z, t.y. $R=+\infty$.

Jeigu $A=0$, tai $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=+\infty$ su bet kokiu $z\neq z_0$, todėl eilutė diverguoja, paėmus bet kokį $z\neq z_0$, o tai ir reiškia, kad $R=0$.

2 teorema įrodyta.

Paskutiniame ankstesnio paragrafo skirsnyje nagrinėjome eilutes

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \quad \text{ir} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Įrodėme, kad pirmoji eilutė konverguoja su visais z, $|z|<1$, ir diverguoja su visais z, $|z|\geqslant 1$, o antroji eilutė konverguoja su visais z. Taigi pirmosios eilutės konvergavimo spindulys $R=1$, o antrosios – $R=+\infty$. Nesunkiai įsitikintume, kad tą patį rezultatą gautume ir pagal (2) formulę.

Išnagrinėsime dar keletą pavyzdžių.

1 pavyzdys. Nagrinėsime laipsninę eilutę $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ ir rasime jos konvergavimo spindulį.

Kadangi $a_n=\frac{1}{2^n}>0$ su visais n, tai, remiantis (1) formule,

$$R=\lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot 1}=2.$$

Vadinasi, duotoji eilutė konverguoja visuose taškuose z, $|z|<2$, ir diverguoja visuose taškuose z, $|z|>2$. Ta eilutė taip pat diverguoja ir visuose taškuose z, $|z|=2$, nes juose nėra išpildyta būtina konvergavimo sąlyga.

2 pavyzdys. Nagrinėsime eilutę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

Tos eilutės koeficientai yra teigiami: $a_n=\frac{1}{n^2}>0$ su visais n. Remiantis (2) formule,

$$R=\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2}=1.$$

Taigi $|z|<1$ yra duotosios eilutės konvergavimo skritulys.

Kadangi eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguoja, tai duotoji eilutė konverguoja absoliučiai su kiekvienu z, $|z|=1$.

Vadinasi, duotoji eilutė konverguoja absoliučiai visuose taškuose z, $|z|\leqslant 1$, ir diverguoja visuose kituose taškuose z.

Analogiškai rastume, kad eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ konvergavimo spindulys lygus 1. Tačiau yra konvergavimo skritulio krašto, t.y. apskritimo $|z|=1$ taškų, kuriuose eilutė konverguoja, ir yra taškų, kuriuose eilutė diverguoja. Pavyzdžiui, taške $z=1$ eilutė diverguoja, o taške $z=-1$, remiantis Leibnico požymiu, konverguoja.

3 pavyzdys. Raskite eilutės $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$ konvergavimo spindulį. Tai eilutei negalime pritaikyti (2) formulės, nes visi jos koeficientai su nelyginiais numeriais lygūs nuliui:

$$a_{2n+1}=0 \quad \text{ir} \quad a_{2n}=\frac{1}{2^n}, \quad \text{imant visus } n.$$

Norėdami rasti konvergavimo spindulį, fiksuosime kurią nors reikšmę $z \neq 0$ ir taikysime Dalambero požymį skaičių eilutei su bendruoju nariu $u_n = \frac{|z|^{2n}}{2^n}$. Tada

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|z|^{2(n+1)} \cdot 2^n}{2^{n+1}|z|^{2n}} = \frac{|z|^2}{2}.$$

Taigi, jeigu $|z|^2<2$, tai eilutė konverguoja absoliučiai, jeigu $|z|^2>2$, tai eilutė diverguoja. Vadinasi, $R=\sqrt{2}$.

2. Laipsninės eilutės su realiaisiais nariais. Šiame skirsnyje nagrinėsime laipsnines eilutes su realiaisiais nariais, t.y. eilutes

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{1}$$

$x_0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ — duoti realieji skaičiai, o x įgyja tik realiąsias reikšmes.

Pabrėšime, kad nagrinėjamosios eilutės bus laipsninės eilutės su kompleksiniais nariais, jeigu x įgis bet kokią kompleksinę reikšmę z. Tada toms eilutėms galios visi 1 skirsnio apibrėžimai ir teoremos. Vadinasi, jeigu R yra (1) eilutės konvergavimo spindulys, tai eilutė diverguoja visuose taškuose x, $|x-x_0|>R$, ir konverguoja visuose tokiuose taškuose x, kad $|x-x_0|<R$, t.y. visuose x iš intervalo $]x_0-R;\ x_0+R[$, kurį vadinsime *konvergavimo intervalu.* Pavyzdžiui, jeigu $R=+\infty$, tai konvergavimo intervalas bus visa realiųjų skaičių aibė $\mathbf{R}=]-\infty;\ +\infty[$; jeigu $R=0$, tai eilutė konverguos tik taške x_0.

Konvergavimo intervale laipsninė eilutė apibrėžia funkciją

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \tag{2}$$

kurią vadinsime *laipsninės eilutės suma.*

Galėtume įrodyti, kad laipsninės eilutės suma eilutės konvergavimo intervale yra tolydi ir turi tolydžias visų eilių išvestines, kad sumos išvestinė $S'(x)$ yra išvestinių eilutės suma, t.y.

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}. \tag{3}$$

Analogiškai,

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n (x-x_0)^{n-2},$$

$$S'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)\, a_n (x-x_0)^{n-3}$$

ir t.t. Turint tai omenyje, kartais sakoma, kad laipsninės eilutės sumos išvestinė yra lygi išvestinių sumai arba laipsnines eilutes galima diferencijuoti panariui:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n (x-x_0)^n\right)'. \tag{4}$$

Šio teiginio neįrodinėsime. Taip pat neįrodinėsime ir teiginio, kad laipsninę eilutę galima integruoti panariui.

Laipsninės eilutės sumos integralas yra lygus atitinkamų duotosios eilutės narių integralų eilutės sumai, t.y.

$$\int_a^b S(x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n (x-x_0)^n\,dx \tag{5}$$

bet kokioje atkarpoje [a; b], *kuri yra konvergavimo intervalo poaibis.* Kitaip tariant, konvergavimo intervale laipsninę eilutę galima integruoti panariui:

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n (x-x_0)^n\,dx. \tag{6}$$

Išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

1 pavyzdys. Rasime laipsninės eilutės

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \tag{7}$$

sumą.

Pirmiausia rasime (7) eilutės konvergavimo spindulį R. Visi tos eilutės koeficientai išreiškiami formule $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, todėl (žr. 1 skirsnio (2) formulę)

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Taigi (7) eilutė konverguoja intervale $]-1;\,1[$ ir jos suma $S(x)$ turi tolydžią išvestinę $S'(x)$. Pasinaudoję (3) formule, gauname

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}.$$

Paskutinioji eilutė konverguoja intervale $]-1; 1[$ į funkciją $\frac{1}{1+x}$, todėl

$$S'(x)=\frac{1}{1+x}.$$

Suintegravę gausime $S(x)=\ln(1+x)+C$, C – konstanta. Kadangi $S(0)=0$, $\ln(1+0)=0$, tai $C=0$.

Vadinasi,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x),$$

imant kiekvieną x iš intervalo $]-1; 1[$.

2 pavyzdys. Rasime laipsninės eilutės

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \tag{8}$$

sumą.

Kadangi $a_n=n$, tai

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Taigi (8) eilutė konverguoja intervale $]-1; 1[$ ir

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'.$$

Remiantis (4) formule,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Taigi

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},$$

imant kiekvieną x iš intervalo $]-1; 1[$.

Pratimai

1. Raskite šių eilučių konvergavimo spindulius:

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}z^n$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{3^n}$; d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{n!}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\,z^n$.

2. Raskite šių eilučių konvergavimo skritulius:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} (z-1)^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^n}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{2n}}{2^n}$; d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n!}$.

3. Raskite šių eilučių konvergavimo intervalus:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1}$; b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$;

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\, 2^k}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$;

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

§ 41. TEILORO EILUTĖS

1. Teiloro formulė. Sakykime, funkcija $f(x)$ yra apibrėžta ir turi tolydžią išvestinę $f'(x)$ kurioje nors taško x_0 aplinkoje. Tada, remiantis Niutono—Leibnico formule,

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt.$$

Jeigu, be to, funkcija $f(x)$ turi tolydžią antrąją išvestinę $f''(x)$, tai, remiantis dalinio integravimo formule,

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt=-\int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(x-t)=$$

$$=-f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt=$$

$$=f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

Taigi

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt.$$

Jeigu $f(x)$ turi ir tolydžią trečiąją išvestinę $f'''(x)$, tai

$$\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,dt = \int_{x_0}^{x} f''(t)\,d\Big(-\frac{1}{2}(x-t)^2\Big) =$$

$$= -\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt =$$

$$= \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt,$$

taigi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) +$$

$$+ \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,dt.$$

Analogiškai, jeigu $f(x)$ turi tolydžią ketvirtąją išvestinę $f^{\mathrm{IV}}(x)$, tai

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x} f^{\mathrm{IV}}(t)(x-t)^3\,dt,$$

ir t.t. Apskritai, jeigu $f(x)$ turi tolydžią $(n+1)$-ąją išvestinę $f^{(n+1)}(x)$, tai

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \qquad (1)$$

Tą formulę vadinsime *funkcijos $f(x)$ Teiloro formule taške x_0 su integralinės formos papildomuoju nariu.* Polinomą

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

vadinsime *Teiloro polinomu*, o funkciją

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt \qquad (2)$$

– papildomuoju nariu.

Laikydami $f(x_0)=f^{(0)}(x_0)$ ir $0!=1$, (1) Teiloro formulę galėsime užrašyti kompaktiškiau:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{k}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x). \qquad (3)$$

Remiantis vidurinės reikšmės teorema, pritaikyta (2) integralui, galima rasti tokį skaičių ξ, esantį tarp x_0 ir x, kad būtų

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,dt=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Taigi įrodėme šitokią teoremą.

1 teorema. *Jeigu funkcija $f(x)$ turi tolydžią $(n+1)$-osios eilės išvestinę intervale $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$, tai kiekvienam $x\in]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ galima rasti tokį ξ, esantį tarp x_0 ir x, kad*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (4)$$

Tą formulę vadinsime *Teiloro formule su Lagranžo formos papildomuoju nariu.* (1), (3) arba (4) Teiloro formulės dešiniąją pusę vadinsime n-osios eilės funkcijos $f(x)$ dėstiniu pagal Teiloro formulę taške x_0.

2 teorema. *Sakykime, funkcija $f(x)$ intervale $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ turi tolydžią $(n+1)$-osios eilės išvestinę. Jeigu egzistuoja tokie skaičiai $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ir tokia tolydžioji funkcija $\varphi(x)$, kad*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k+\varphi(x)(x-x_0)^{n+1}, \qquad (5)$$

imant kiekvieną x iš intervalo $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$, tai

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

t.y. (5) *formulės dešinioji pusė yra funkcijos $f(x)$ n-osios eilės dėstinys pagal Teiloro formulę taške x_0.*

Įrodymas. Iš (5) formulės ir (4) Teiloro formulės išplaukia, kad

$$a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\varphi(x)(x-x_0)^{n+1}=$$

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Kai $x=x_0$, $a_0=f(x_0)$. Taigi

$$a_1+a_2(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^{n-1}+\varphi(x)(x-x_0)^n=$$

$$=f'(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n.$$

Kai $x=x_0$, $a_1=f'(x_0)$.

Analogiškai įrodytume, kad

$$a_2=\frac{f''(x_0)}{2}, \ \ldots, \ a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

ir $\varphi(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Taigi 2 teorema įrodyta.

Pastebėsime, kad (5) formulės dešinioji pusė vadinama *funkcijos* $f(x)$ *n-osios eilės dėstiniu* $x-x_0$ *laipsniais.* Vadinasi, 2 teorema tvirtina, kad funkcijos $f(x)$ n-osios eilės dėstinys $x-x_0$ laipsniais yra vienintelis – tai funkcijos $f(x)$ dėstinys pagal Teiloro formulę.

1 pavyzdys. Parašysime funkcijos $f(x)=e^x$ trečiosios eilės dėstinį pagal Teiloro formulę taške $x_0=0$.

Kadangi $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$, $f'''(x)=e^x$, $f^{IV}(x)=e^x$ ir $f(0)=f'(0)=$ $=f''(0)=f'''(0)=1$, tai, imant kiekvieną $x\in\boldsymbol{R}$,

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{e^\xi}{4!}x^4;$$

čia ξ yra tarp x ir 0.

2 pavyzdys. Parašysime funkcijos $\sin x$ trečiosios eilės dėstinį $x-x_0$ laipsniais.

Kadangi $(\sin x)'=\cos x$, $(\sin x)''=-\sin x$, $(\sin x)'''=-\cos x$, tai

$$\sin x=\sin x_0+\cos x_0(x-x_0)+$$

$$+\frac{-\sin x_0}{2}(x-x_0)^2+\frac{-\cos x_0}{3!}(x-x_0)^3+R_3(x);$$

čia

$$R_3(x)=\frac{1}{3!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^3\sin t\,dt=\frac{\sin\xi}{4!}(x-x_0)^4,$$

o taškas ξ yra tarp x_0 ir x.

Ypač paprastas yra funkcijos $\sin x$ dėstinys pagal Teiloro formulę taške $x_0=0$:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{\sin\xi}{4!}x^4.$$

Akivaizdu, kad funkcijos $\sin x$ 4-osios eilės dėstinys pagal Teiloro formulę taške $x_0=0$ yra

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5;$$

čia ξ yra tarp x ir 0.

3 pavyzdys. Rasime artinio $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ paklaidą, kai x yra iš atkarpos $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Iš Teiloro formulės (žr. 2 pavyzdį) išplaukia, kad

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\right| = \left|\frac{\cos\xi}{5!}x^5\right| \leqslant \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5.$$

Remiantis pačiais netiksliausiais apskaičiavimais, nurodyto $\sin x$ artinio absoliutinė paklaida atkarpoje $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ ne didesnė kaip 0,01.

4 pavyzdys. Užrašysime funkcijos $f(x)=e^{\sin x}$ trečiosios eilės dėstinį pagal Teiloro formulę taške $x_0=0$.

Nagrinėsime funkciją e^y, kurią galima išdėstyti šitaip (žr. 1 pavyzdį):

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{e^\eta}{4!}y^4;$$

čia η yra tarp y ir 0.

Pažymėję $y=\sin x$, gausime

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}(\sin x)^2 + \frac{1}{6}(\sin x)^3 + \frac{e^\eta}{4!}(\sin x)^4.$$

2 pavyzdyje įrodėme, kad

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5.$$

Taigi

$$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{5!}x^5\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)^3 + \frac{e^\eta}{4!}\left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)^4 =$$

$$= 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \varphi(x)x^4 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \varphi(x)x^4;$$

čia $\varphi(x)$ – kokia nors tolydžioji funkcija.

Remiantis 2 teorema, tai ir yra ieškomasis dėstinys.

2. Kai kurių elementariųjų funkcijų dėstiniai pagal Teiloro formulę. Šiame skirsnyje pateiksime funkcijų $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ n-osios eilės dėstinius pagal Teiloro formulę taške $x_0=0$.

1. Funkcijos $f(x)=e^x$ dėstinys. Kadangi $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x$ ir apskritai $f^{(k)}(x)=e^x$, tai funkcijos e^x dėstinys pagal Teiloro formulę taške $x_0=0$ yra

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x);$$

čia

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt=\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Vadinasi, funkcijos e^x dėstinys pagal Teiloro formulę taške $x_0=0$ su Lagranžo formos papildomuoju nariu yra

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^\xi;$$

čia ξ yra tarp x ir 0.

2. Funkcijos $f(x)=\sin x$ dėstinys. Turime

$$(\sin x)'=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right),$$

$$(\sin x)''=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)'=\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+x\right)$$

ir t.t. Remiantis indukcijos principu,

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(n\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Taigi $f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$ ir todėl $f^{(n)}(0)=0$, kai n lyginis, ir $f^{(2k+1)}(0)=$ $=(-1)^k$, kai n nelyginis.

Vadinasi, funkcijos $\sin x$ dėstinys pagal Teiloro formulę taške $x_0=0$ su integralinės formos papildomuoju nariu yra

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!}\int_0^x (x-t)^{2n+2}\cos t\,dt,$$

o su Lagranžo formos papildomuoju nariu –

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!}x^{2n+3}\cos\xi;$$

čia ξ yra tarp 0 ir x.

Pasinaudoję sumavimo ženklu Σ, paskutinę formulę galime užrašyti šitaip:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \cos \xi.$$

3. Funkcijos $f(x) = \cos x$ dėstinys. Kaip ir nagrinėjant $\sin x$, reikėtų įrodyti formulę

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(n\frac{\pi}{2} + x\right).$$

Kai $n = 2k$,

$$(\cos x)^{(2k)} = \cos(k\pi + x) = (-1)^k \cos x,$$

o kai $n = 2k+1$,

$$(\cos x)^{(2k+1)} = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + x\right) = (-1)^{k+1} \sin x.$$

Taigi $\cos x$ dėstinys pagal Teiloro formulę taške $x_0 = 0$ su integralinės formos papildomuoju nariu yra

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \int_0^x (x-t)^{2n+1} \cos t \, dt,$$

o su Lagranžo formos papildomuoju nariu —

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2} \cos \xi;$$

čia ξ yra tarp 0 ir x.

4. Funkcijos $f(x) = \ln(1+x)$ dėstinys. Turime

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

ir t.t. Remiantis indukcijos principu,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

ir

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$$

Taigi

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} +$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}};$$

čia ξ yra tarp x ir 0. Trumpiau

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}.$$

Pakeitę kintamąjį x kintamuoju $-x$, gausime

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{(1-\xi)^{n+1}}.$$

5. Funkcijos $f(x)=(1+x)^\alpha$ dėstinys. Kadangi

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\quad f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

ir apskritai

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

tai

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+$$

$$+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1};$$

čia ξ yra tarp x ir 0.

Atskiru atveju, kai $\alpha=n$, Teiloro formulė sutampa su Niutono binomo formule

$$(1+x)^n=1+nx+C_n^2x^2+\dots+C_n^nx^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k.$$

Iš analogijos bendruoju atveju taip pat rašoma

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}C_\alpha^kx^k+C_\alpha^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1};$$

čia

$$C_\alpha^k=\frac{\alpha(\alpha-1)\ \dots\ (\alpha-k+1)}{k!},\quad C_\alpha^0=1.$$

Kai $\alpha=-1$, $C_{-1}^k=(-1)^k$, todėl

$$(1+x)^{-1}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^k+(-1)^{n+1}(1+\xi)^{-n-2}x^{n+1}.$$

3. Teiloro eilutės. Sakykime, funkcija $f(x)$ yra apibrėžta ir turi visų eilių išvestines kurioje nors taško x_0 aplinkoje. Tada laipsninę eilutę

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (1)$$

vadinsime funkcijos $f(x)$ *Teiloro eilute* taške x_0.

L e m a. *Funkcijos $f(x)$ Teiloro eilutė konverguoja į $f(x)$ taške x tada ir tik tada, kai Teiloro formulės papildomasis narys tame taške konverguoja į nulį, kai $n \to \infty$.*

Į r o d y m a s. Iš Teiloro formulės

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

išplaukia, kad

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \lim_{n \to \infty}\left(f(x) - R_n(x)\right) = f(x),$$

jeigu tik $R_n(x) \to 0$, kai $n \to \infty$, o tai ir reiškia, kad (1) eilutė konverguoja į $f(x)$.

Atvirkščiai, jeigu (1) eilutė konverguoja į $f(x)$, tai

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = \lim_{n \to \infty}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right) =$$

$$= f(x) - \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = 0.$$

Lema įrodyta.

1 t e o r e m a. *Funkcijos e^x Teiloro eilutė, imant kiekvieną $x \in \boldsymbol{R}$, konverguoja į e^x, t.y.*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \textit{su visais} \quad x \in \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

Į r o d y m a s. Iš pradžių įrodysime, kad (2) eilutė konverguoja absoliučiai, imant bet kokį x.

Kadangi (2) eilutės bendrasis narys yra $u_n = \frac{x^n}{n!}$, tai

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

imant kiekvieną $x \neq 0$. Remiantis Dalambero požymiu, eilutė konverguoja absoliučiai, imant kiekvieną $x \in \boldsymbol{R}$, ir todėl

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0 \quad \text{su visais} \quad x \in \boldsymbol{R}.$$

Dabar iš e^x dėstinio pagal Teiloro formulę

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi},$$

perėjus prie ribos, kai $n \to \infty$, išplaukia (2) lygybė.

Taigi 1 teorema įrodyta.

2 teorema. *Funkcijos* $\sin x$ *Teiloro eilutė konverguoja į* $\sin x$, *imant kiekvieną* $x \in \mathbf{R}$, *t.y.*

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad su\ visais \quad x \in \mathbf{R}. \qquad (3)$$

Įrodymas. Kadangi

$$u_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0,$$

imant kiekvieną $x \neq 0$. Remiantis Dalambero požymiu, (3) eilutė konverguoja absoliučiai su kiekvienu x. Taigi, imant bet kokį x,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0.$$

Dabar iš dėstinio pagal Teiloro formulę

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \cos \xi$$

ir sąryšio

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} x^{2n+3} \cos \xi \right| \leqslant \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \to 0,$$

kai $n \to \infty$, išplaukia, kad (3) eilutė konverguoja į $\sin x$. Taigi 2 teorema įrodyta.

Analogiškai įrodytume ir tolesnę teoremą.

3 teorema. *Funkcijos* $\cos x$ *Teiloro eilutė, imant bet kokį* $x \in \mathbf{R}$, *konverguoja į* $\cos x$, *t.y.*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad su\ visais \quad x \in \mathbf{R}. \qquad (4)$$

4 teorema. *Funkcijos* $\ln(1+x)$ *Teiloro eilutė, imant kiekvieną* $x \in]-1;\ 1[$, *konverguoja į* $\ln(1+x)$, *t.y.*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad su\ visais \quad x \in]-1;\ 1[. \qquad (5)$$

Įrodymas. 40 paragrafo 2 skirsnio 1 pavyzdyje įrodėme, kad (5) laipsninė eilutė konverguoja, imant bet kokį x iš intervalo $]-1;\ 1[$ ir jos suma yra $\ln(1+x)$. Taigi 4 teorema įrodyta.

5 teorema. *Funkcijos* $(1+x)^\alpha$ *Teiloro eilutė su bet kokiu* $x\in]-1;\ 1[$ *konverguoja į* $(1+x)^\alpha$, *t.y.*

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n \quad su\ visais \quad x\in]-1;\ 1[. \qquad (6)$$

Įrodymas. Jeigu α yra nulis arba natūrinis skaičius, tai (6) eilutė yra baigtinė suma. Kitais atvejais visi (6) laipsninės eilutės koeficientai $a_n=C_\alpha^n$ nelygūs nuliui. Vadinasi, konvergavimo spindulį galima apskaičiuoti pagal formulę

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{|\alpha-n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n-\alpha}=1.$$

Taigi (6) laipsninė eilutė konverguoja, kai x yra iš intervalo $]-1;\ 1[$, ir diverguoja, kai $|x|>1$.

Sakykime, $f(x)$ yra (6) eilutės suma. Išdiferencijavę eilutę panariui, gauname

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nC_\alpha^n x^{n-1}=\alpha+\alpha(\alpha-1)x+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2}x^2+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\ldots$$

Padauginame tą lygybę iš $1+x$:

$$(1+x)f'(x)=\alpha+\alpha x+\alpha(\alpha-1)x+\alpha(\alpha-1)x^2+$$
$$+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n+\ldots=\alpha\Big\{1+\alpha x+$$
$$+\ldots+\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}x^n+$$
$$+\frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{n!}x^n+\ldots\Big\}=\alpha\Big\{1+\alpha x+$$
$$+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots\Big\}=\alpha f(x).$$

Išsprendę diferencialinę lygtį $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$, gauname $f(x)=$ $=C(1+x)^\alpha$. Norėdami rasti konstantą C, imkime $x=0$. Tada $f(0)=C$. Kadangi $f(0)=1$, tai ir $C=1$. Taigi $f(x)=(1+x)^\alpha$.

5 teorema įrodyta.

4. Funkcijos e^z, $\sin z$, $\cos z$. Iš 3 skirsnio 1, 2 ir 3 teoremų bei laipsninių eilučių Abelio teoremos išplaukia, kad eilutės

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

konverguoja, imant bet kokį kompleksinį z. Apibrėžkime

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$$

Funkcijos e^z, $\sin z$, $\cos z$ yra apibrėžtos, kai z bet koks kompleksinis skaičius; be to, kai $z=x$, x – realus, tai yra įprastinės funkcijos e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Jeigu $z=iy$, y – realus, tai

$$e^{iy}=\sum_{n=0}^{\infty}i^n\frac{y^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}i^{2k}\frac{y^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{\infty}i^{2k+1}\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k}}{(2k)!}+i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}=\cos y+i\sin y.$$

Vadinasi,

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y$$

ir analogiškai

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y.$$

Galėtume įrodyti, kad

$$e^{z_1+z_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_1^k}{k!}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z_2^m}{m!}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}.$$

Iš tų formulių išplaukia, kad yra teisinga lygybė

$$e^z=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y);$$

čia $z=x+iy$.

Atkreipsime dėmesį: II skyriuje ta lygybe apibrėžėme e^z, kai z – kompleksinis skaičius. Vadinasi, naujasis e^z apibrėžimas neprieštarauja ankstesniajam.

Pratimai

1. Parašykite šių funkcijų nurodytų eilių dėstinius pagal Teiloro formulę taške $x_0=0$:

a) funkcijos $\ln\cos x$ ketvirtosios eilės;

b) funkcijos $\sin(\sin x)$ trečiosios eilės;

c) funkcijos $\operatorname{tg} x$ penktosios eilės.

2. Raskite artinių paklaidas:

a) $\operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}$ atkarpoje $\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6}\right]$;

b) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ atkarpoje $[0;\ 1]$.

3. Išdėstykite šias funkcijas eilute x laipsniais ir raskite eilučių konvergavimo spindulius:

a) $y = e^{-x^2}$; b) $y = 2^{\frac{x}{2}}$;

c) $y = \ln \frac{4+x}{4-x}$; d) $y = \cos^2 x$;

e) $y = \frac{1}{(1-x)^3}$; f) $y = \frac{1}{1+x^3}$;

g) $z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; h) $y = \frac{1}{x^2-2x-3}$;

i) $y = \frac{x^2+2x+3}{x^2-5x+6}$.

4. Parašykite funkcijų eilutes x laipsniais ir raskite eilučių konvergavimo spindulius:

a) $y = \operatorname{arctg} x$; b) $y = \arcsin x$;

c) $y = \arccos x$; d) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x}$;

e) $\int_0^x e^{-t^2}\, dt$; f) $\int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$; g) $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\, dt$.

Nurodymas. Patariame nagrinėti duotųjų funkcijų išvestines.

ATSAKYMAI

I SKYRIUS

1. a) 29; b) 18; c) 12; d) 6; e) 20; f) -4.

2. a) -11; b) -1; c) 9; d) $-\frac{1}{2}$.

4. a) $\pi k+\frac{\pi}{4}$; b) $\pi k\pm\frac{\pi}{4}$. **5.** (3; 2). **6.** $k=-4$.

7. a) -5 ir 3; b) -4 ir 5; c) 4 ir 5; d) -2 ir -1. **9.** $-\sin x-\cos x$.

10. a) (3; 2); b) (4; 1); c) (5; 3); d) (2; 2); e) (3; 0); f) (4; 3).

11. a) (0; 0); b) $\left(x;\ \frac{3x}{2}\right)$, $x\in \boldsymbol{R}$; c) (0; 0); d) (0; 0); e) $\left(x;\ \frac{2x}{3}\right)$, $x\in \boldsymbol{R}$; f) (0; 0).

12. a) (4; 3); b) (5; 4). **13.** $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sin\alpha};\ \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\right)$. **14.** -18. **15.** $-\frac{1}{2}$.

17. a) $-\frac{11}{7}$ ir 2; b) $\frac{1}{6}$ ir $\frac{1}{2}$; c) $-\frac{11}{7}$ ir 2.

18. a) 0 ir 2; b) -3 ir 6. **20.** (1; 4; 5).

22. 16. **24.** Turi. **25.** Eina.

26. 1; 2 ir 3. **27.** a) $6x^2$; b) $3x^2$.

28. $xy+xz+yz+xyz$. **29.** (0; 0; 0; 0).

30. (2; 4; 1). **31.** (3; 1; 4; 6).

32. Jeigu $\alpha\neq-1$, $\alpha\neq2$, tai $x=\frac{3-\alpha}{\alpha+1}$, $y=-\frac{2}{\alpha+1}$. Jeigu $\alpha=-1$, tai sprendinių nėra. Jeigu $\alpha=2$, tai $x=\boldsymbol{c}$, $y=\boldsymbol{c}-1$, $\boldsymbol{c}\in \boldsymbol{R}$.

33. a) (4; 3; 2); b) (5; 3; 1); c) (3; 5; 4); d) (6; 2; 5).

34. Kai $\alpha=1$ ir $\alpha=-\frac{13}{3}$, sistema turi vienintelį sprendinį, su kitais $\alpha\in \boldsymbol{R}$ sistema turi du sprendinius.

35.

Duonos kombinatas	Gyvenvietė		
	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3
Nr. 1	20 t	20 t	0
Nr. 2	10 t	0	10 t

§ 7. **1.** a) $z_1+z_2=3+7i$, $z_1 z_2=-22+7i$; b) $z_1+z_2=2-4i$, $z_1 z_2=-1{,}81-5{,}2i$; c) $z_1+z_2=-8-10i$, $z_1 z_2=21-24i$; d) $z_1+z_2=10$, $z_1 z_2=28$.

2. a) $z_2-z_1=-2i$, $\frac{z_2}{z_1}=-i$; b) $z_2-z_1=4-2i$, $\frac{z_2}{z_1}=1-2i$; c) $z_2-z_1=1-\sqrt{2}+(\sqrt{6}-\sqrt{3})i$, $\frac{z_2}{z_1}=\sqrt{2}$; d) $z_2-z_1=2\sqrt{b}\,i$, $\frac{z_2}{z_1}=\frac{a^2-b}{a^2+b}+\frac{2a\sqrt{b}}{a^2+b}i$.

3. a) $\frac{13}{20}-\frac{7}{4}i$; b) 0; c) $-2i$; d) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; e) 0.

4. a) -2; b) 0. **5.** a) 0; b) $-\frac{11}{17}$.

6. a) $-\frac{41}{50}+\frac{63}{50}i$; b) $\frac{22}{159}-\frac{5}{318}i$; c) $-38+41i$; d) $-\frac{18}{25}+\frac{173}{50}i$.

7. a) $-1-i$; b) 0, -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **8.** (3; 4), (3; 5), (4; 4), (4; 5).

9. $(-2; -2)$, $(-2; 2)$. **11.** $z_1=1-i$, $z_2=i$.

§ 8. **2.** $z_4=z_1+z_3-z_2$.

3. $t(7+i)$, t — bet koks realusis skaičius.

4. a) 3; b) 1; c) 7; d) $\sqrt{2}$; e) 1; f) 7.

5. a) $2-\frac{3}{2}i$; b) 0, $3i$, $-3i$; c) bi, $b\in \mathbf{R}$.

6. $\frac{7}{6}+\frac{5}{6}i$.

7. a) Skritulys (ir apskritimas) su centru taške $z=0$ ir spinduliu $R=1$; b) apskritimas su centru taške $z=0$ ir spinduliu $R=2$; c) taškas $z=i$; d) kairioji pusplokštumė, apribota menamąja ašimi: e) pusplokštumė, apribota antrojo ir ketvirtojo koordinatinių kampų pusiaukampinėmis ir turinti tašką $z=-1$; f) skritulys (ir apskritimas) su centru taške $z=1-2i$ ir spinduliu $R=2$; g) aibė taškų, esančių apskritimo su centru taške $z=1-2i$ ir spinduliu $R=3$ viduje ir apskritimo su centru tame pačiame taške ir spinduliu $R=2$ išorėje arba pačiame apskritime; h) aibė sudaryta iš be galo daug koncentrinių žiedų su centru taške $z=0$, į tą aibę įeina žiedai, kuriems priklauso realiosios ašies intervalai $2k\pi<x<(2k+1)\pi$, $k\in \mathbf{Z}$; i) aibė sudaryta iš visų skritulio su centru taške $z=10i$ ir spinduliu $R=10$ taškų, išskyrus jo centrą; j) apskritimas su centru taške $z=-3$ ir spinduliu $R=3$.

8. $-\frac{3}{2}-\frac{17}{4}i$; $-\frac{3}{2}-2i$.

9. a) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$; b) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$; c) $\pi+2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$; d) $2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$; e) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$; f) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$.

10. a) Realioji teigiama pusašė $z=x>0$; b) menamoji pusašė $z=iy$, $y>0$; c) menamoji pusašė $z=iy$, $y>0$; d) viršutinioji pusplokštumė $z=x+iy$, $y>0$; e) visa kompleksinė plokštuma, išskyrus tašką $z=0$.

11. Realioji neigiama pusašė $z=x$, $x<0$.

12. i, **13.** $\frac{12}{5}+\frac{16}{5}i$.

§ 9. 1. a) $2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)$; b) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; c) $\cos 0+i\sin 0$; d) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; e) $\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$; f) $\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; g) $-2\cos\frac{5\pi}{9}\times\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$.

2. a) $z=1=\cos 0+i\sin 0$; b) $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$; c) $z=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\cos 0+i\sin 0)$; d) $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$; e) $z=-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{3}$.

3. a) $\frac{5}{3}(\cos 230°+i\sin 230°)$; b) $\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{29\pi}{20}+i\sin\frac{29\pi}{20}\right)$.

4. $-10+4i$. **5.** $3-\frac{9}{2}i$.

6. a) $-\frac{\sqrt{2}}{16}+i\frac{\sqrt{2}}{16}$; b) 1; c) $\cos 50°+i\sin 50°$; d) $\frac{1}{64}-\frac{\sqrt{3}}{64}i$; e) -2; f) 2.

7. a) $2^{100}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; b) $8\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

c) $2(\cos 0+i\sin 0)$, kai n lyginis; $2(\cos\pi+i\sin\pi)$, kai n nelyginis;

d) $\frac{1}{\cos^4 1}(\cos 4+i\sin 4)$; e) $\frac{1}{\cos^4 2}(\cos 8+i\sin 8)$; f) $-32\cos^5\frac{3\pi}{5}\times\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. **8.** $n=4k$, $k\in \mathbf{Z}$.

9. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

c) $\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}+i$, $-2i$; d) 1, $\cos 72°+i\sin 72°$, $\cos 144°+i\sin 144°$, $\cos 216°+i\sin 216°$, $\cos 288°+i\sin 288°$.

10. a) $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$; b) $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$, $\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$; c) $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\times\left(\cos\frac{7\pi}{15}+i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{15}+i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{15}+i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$, $\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$; d) $\sqrt{3}+i$, $2i$, $-\sqrt{3}+i$, $-\sqrt{3}-i$, $-2i$, $\sqrt{3}-i$.

11. a) $1+2i$, $1-2i$; b) $2+i$, $-2+i$; c) $3+5i$, $2-3i$; d) $5+i$, $3+2i$.

12. $-\frac{3}{2}i$.

13. $2(\cos 144^\circ + i\sin 144^\circ)$, $2(\cos 216^\circ + i\sin 216^\circ)$, $\sqrt[5]{31}\ (\cos 108^\circ + i\sin 108^\circ)$, $-\sqrt[5]{31}$, $\sqrt[5]{31}\ (\cos 252^\circ + i\sin 252^\circ)$.

14. a) $e^2\cos 1 - e^2\sin 1$; b) i; c) $-e^7\sin 3 + ie^7\cos 3$.

15. a) $4e^{i\frac{7\pi}{6}}$; b) $e^{i\frac{6\pi}{7}}$.

16. a) $e^{2\pi i}=1$; b) $8e^{-i\frac{\pi}{4}}=4\sqrt{2}-4\sqrt{2}\,i$; c) $64e^{i\pi}=-64$; d) $e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; e) $2^7 e^{\frac{3}{2}\pi i}=-2^7 i$.

17. a) 1, $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $2e^{\frac{2\pi i}{9}}$, $2e^{\frac{8\pi i}{9}}$, $2e^{\frac{14\pi i}{9}}$;
d) $\sqrt[4]{\frac{1}{8}}+i\sqrt[4]{\frac{9}{8}}$, $-\sqrt[4]{\frac{9}{8}}+i\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$, $-\sqrt[4]{\frac{1}{8}}-i\sqrt[4]{\frac{9}{8}}$, $\sqrt[4]{\frac{9}{8}}-i\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$.

III SKYRIUS

§ 10. 2. a) 3,003; b) 1,4435; c) 2,89; d) 3,11; e) 1,316; f) 3,083.

3. a) 4,0208; b) 1,995; c) 5,00177; d) 0,484; e) 0,05; f) $-0{,}0175$; g) 0,965; h) 1,037; i) $-0{,}03$

§ 12. 1. $\frac{x^5}{5}+C$. **2.** $\frac{5}{8}x^8+C$. **3.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$. **4.** $\frac{x^6}{6}-\frac{x^4}{4}+C$.

5. $\frac{ax^2}{2}+bx+C$. **6.** $7t-\frac{3}{2}t^2-\frac{t^4}{4}+C$. **7.** $\frac{1}{2}u^4-\frac{5}{3}u^3-\frac{7}{2}u^2-3u+C$.

8. $-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x^4}+C$. **9.** $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}t^{\frac{2}{3}}+C$.

10. $\frac{a}{8}x^8+\frac{b}{4}x^4+\frac{c}{3}x^3+\frac{d}{2}x^2+\frac{2}{3}ex\sqrt{x}+fx+C$.

11. $\frac{x^6}{6}-x^3+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$. **12.** $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x-\ln|x|+\frac{1}{x}+C$.

13. $\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{t^2}{2}+6\sqrt{t}+C$. **14.** $\frac{4^x}{\ln 4}+C$.

15. $\frac{b^x}{\ln b}+C$. **16.** $\frac{t^8}{8}+\frac{7^t}{\ln 7}+C$. **17.** $\frac{2250^x}{\ln 2250}+C$.

18. $3x-5\ln|x+2|+C$. **19.** $\frac{t^2}{2}+2t+\frac{3}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}+C$.

20. $\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\frac{3x}{4}+C$. **21.** $\arcsin\frac{x}{5}+C$.

22. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C$. **23.** $\ln|x+\sqrt{x^2-13}|+C$.

24. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2t}{3}+C$. **25.** $\frac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{\frac{5}{2}}}{x-\sqrt{\frac{5}{2}}}\right|+C$.

26. $3e^{x}-5\cos x+3\sin x+4x+C$. **27.** $2\sin x+C$.

28. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. **29.** $\frac{1}{14}\sin 7x-\frac{1}{26}\sin 13x+C$.

30. $-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{20}\cos 10x+C$. **31.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x+C$.

32. $\frac{1}{10}\sin 5x+\frac{1}{22}\sin 11x+C$. **33.** $-\frac{1}{7}\cos 7x+C$.

34. $-\frac{5}{3}\cos\frac{3}{5}x+C$. **35.** $\frac{1}{10}\sin 10x+C$. **36.** $9\sin\frac{x}{9}+C$.

37. $-\frac{1}{11}\cos 11x+\frac{1}{6}\sin 6x-7\cos\frac{x}{7}+\frac{4}{3}\sin\frac{3x}{4}+C$.

38. $e^{x}-e^{-x}+C$. **39.** $\frac{1}{3}e^{3x+5}+C$. **40.** $\frac{1}{18}(3x-1)^{6}+C$.

41. $\frac{5}{32}(1+4x)^{8/5}+C$. **42.** $\ln(3x^{2}+7x+4)+C$.

43. $\frac{1}{42}\ln(7x^{6}+1)+C$. **44.** $-\frac{1}{90}(3+5x^{3})^{-6}+C$.

45. $\frac{1}{9}\sqrt{(3x^{2}-1)^{3}}+C$. **46.** $-\frac{1}{6}\cos^{6}x+C$.

47. $-\frac{3}{4}(1+\cos x)^{\frac{4}{3}}+C$. **48.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

49. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **50.** $\frac{1}{2}x\sqrt{a^{2}-x^{2}}+\frac{a^{2}}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$.

51. $\frac{1}{4}e^{x^{4}}+C$. **52.** $-e^{\cos x}+C$. **53.** $3\ln|\operatorname{arctg}x|+C$.

54. $\frac{1}{3}\sqrt{(\operatorname{arctg}2x)^{3}}+C$. **55.** $\frac{1}{3}(x-3)\sqrt{2x+3}+C$.

56. $\arcsin\frac{x-3}{6}+C$. **57.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{4}+C$. **58.** $\arcsin(2x-1)+C$.

59. $\ln|x+2+\sqrt{x^{2}+4x+7}|+C$. **60.** $\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^{2}+3x}\right|+C$.

61. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{4}+C$. **62.** $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{11}}+C$.

63. $\frac{x^{2}}{4}(2\ln x-1)+C$. **64.** $-x^{2}\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$.

65. $\left(\frac{3}{2}x^{2}-4x\right)\ln x-\frac{3}{4}x^{2}+4x+C$. **66.** $\frac{x^{2}+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$.

67. $\frac{13-6x}{9}e^{-3x}+C$. **68.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^{2}}+C$.

69. $2x \sin \frac{x}{2} + 4 \cos \frac{x}{2} + C.$ **70.** $(6-4x) \cos \frac{x}{2} + 8 \sin \frac{x}{2} + C.$

71. $-(x^2+2x+2)\, e^{-x} + C.$

72. $\frac{x}{2} \sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2} \ln | x + \sqrt{a^2+x^2} | + C.$

73. $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$ **74.** $\frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) + C.$

75. $\frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$ **76.** $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+4}{3} + C.$

77. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{4} + C.$ **78.** $\frac{1}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+8} \right| + C.$

79. $\ln | x-2 | - \frac{5}{x-2} + C.$

80. $\frac{1}{2} \ln (x^2+x+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

81. $-\frac{1}{4} \ln | x | + \frac{13}{12} \ln | x+4 | + \frac{1}{6} \ln | x-2 | + C.$

82. $\frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

83. $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$

84. $\frac{1}{8} \ln | x+1 | + \frac{1}{x+2} + 2 \ln | x+2 | + \frac{1}{4} \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{5}{4(x+3)} - \frac{17}{8} \ln | x+3 | + C.$

IV SKYRIUS

§ 13. 1. 4,5. **2.** b^2-a^2. **3.** $e-1$.

§ 19. 1. a) 20; b) $\frac{21}{8}$; c) $\frac{14}{3}$; d) $\frac{1}{2}$; e) 0.

2. a) 4; b) 1; c) 1,5. **3.** $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}-1)$.

4. a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{2}(e^2-1)$; c) $\frac{10}{3}$; d) $\ln(1+e)$; e) 2; f) $\frac{\pi}{2}$.

5. a) $\frac{23}{3}$; b) 12; c) $\frac{1}{5}(e-1)^5$; d) $\frac{1}{4}$.

§ 20. 1. a) $\frac{4}{3}\pi + \sqrt{3}$; b) $\frac{\pi a^4}{16}$; c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; d) $4 - 2\ln 3$; e) $\frac{\pi}{3}$.

3. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{2}$.

§ 21. 1. a) 1; b) 1; c) $\pi-2$; d) 2; e) $\ln 2 - \frac{1}{2}$; f) $\frac{\pi a^2}{4}$; g) $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

§ 22. 2. 0,7462. **4.** 1,12.

§ **23.** **1.** a) 36 (kv. v.); b) $\frac{2}{3}$ (kv. v.); c) $\frac{32}{3}$ (kv. v.); d) 8 (kv. v); e) $\frac{77}{6}$ (kv. v.); f) $\frac{8}{3}$ (kv. v); g) $\frac{ab}{3}$ (kv. v.); h) $\frac{4}{3}$ (kv. v.); i) $(22\ln 2-6)$ (kv. v.); j) $\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ (kv. v.); k) $\frac{3}{4}$ (kv. v.); l) ln 2 (kv. v); m) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$ (kv. v.).

§ **24.** **1.** a) $\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})+\frac{\sqrt{5}}{2}$; b) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$; c) $\sqrt{1+e^2}+\sqrt{2}-1-\ln\frac{1+\sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$; d) $\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$; e) $2\pi^2 a$; f) $\sqrt{2}(\pi-1)$; g) 12; h) $\frac{a}{2}(e-e^{-1})$; i) $\frac{1}{2}\ln 3$; j) $6a$.

§ **25.** **1.** $\frac{265}{3}$ m. **2.** 42 m. **3.** 32 m. **4.** 5 s. **5.** $a=20$. **6.** 19 m. **7.** 122,375 m. **8.** $\left(8R+\frac{16a}{3}\right)$ m. **9.** 2,45 (MN). **10.** $\frac{H^2}{6}(a+2b)$, 523 (MN). **11.** 1,4 (MN). **12.** 1,8 (MN), 1,35 (MN). **13.** $161\,700\pi$ (N). **14.** $\frac{aH^2}{2}$. **15.** 1724,8 (N). **16.** 739,9 (kN). **17.** 17 863,2 (N). **18.** 39 (J). **19.** 900 (J). **20.** 12,5 (J). **21.** 0,288 (J). **22.** 11,25 (J). **23.** 2452,5 (J) **24.** 3,1392 (J). **25.** 0,16 (J). **26.** 0,54 (J). **27.** 5 (J). **28.** $\frac{a^2}{8}(e^2-e^{-2}+4)$. **29.** $M_x=\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$, $M_y=\frac{9}{8}\sqrt{5}+\frac{1}{16}\ln(2+\sqrt{5})$. **30.** $M_x=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$. **31.** $C\left(\frac{3}{5};\ \frac{3}{4}\right)$. **32.** $C(9;\ 9)$. **33.** $C\left(\pi a;\ \frac{4}{3}a\right)$. **34.** $C\left(\frac{4a}{3\pi};\ \frac{4b}{3\pi}\right)$. **35.** $C\left(0;\ \frac{8}{5}\right)$. **36.** $C\left(0;\ \frac{4a}{3\pi}\right)$. **37.** πRl, $\frac{1}{3}\pi R^2 H$. **38.** $\frac{\sqrt{3}\pi a^2 d}{2}$.

VI SKYRIUS

§ **26.** **1.** a) 5; b) 969; c) 256; d) $k(k+1)$; e) n. **2.** a) 9; 10; b) 7; c) 10; d) 11. **3.** {3; 4; 5} ir {1; 3; 2}. **4.** 12. **5.** 16. **6.** 18; 10. **7.** a) 720; b) 360; c) $8!\cdot C_{10}^{2}$; d) 83 160. **8.** 72. **9.** 15. **10.** 43 200. **11.** $\frac{1}{15}$. **12.** a) 8; b) 8; c) 27; d) 2. **13.** {4; 5; 6; 7; 8; 9} ir {1; 15; 35; 14; 9; 1}. **14.** a) {8; 9; 10}; b) {0; 1; 2; ...; 27}. **15.** a) 60; b) 10. **16.** a) 870; b) 435. **17.** 8436. **18.** 18. **19.** 15. **20.** 35. **21.** 210. **22.** 4060. **23.** a) 30; b) 62. **24.** 5040. **25.** 15 625. **26.** Gali neužtekti. **27.** Ne daugiau kaip $27\cdot 10^7$.

§ **27.** **1.** a) $(x^2-y)^6=\sum_{k=0}^{6} C_6^k (x^2)^{6-k}(-y)^k=x^{12}-6x^{10}y+15x^8y^2-20x^6y^3+$ $+15x^4y^4-6x^2y^5+y^6$; b) $(3a^2-2b)^5=\sum_{k=0}^{5} C_5^k (3a^2)^{5-k}(-2b)^k=243a^{10}-810a^8b+$ $+1080a^6b^2-720a^4b^3+240a^2b^4-32b^5$. **2.** a) $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^7+7\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^5+21\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^3+$ $+35\sqrt{\frac{a}{b}}+35\sqrt{\frac{b}{a}}+21\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3+7\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^7$; b) $x^{16}-16x^{13}+112x^{10}-$ $-448x^7+1120x^4-1792x+\frac{1792}{x^2}-\frac{1024}{x^5}+\frac{256}{x^8}$. **3.** a) $109\sqrt{2}-89\sqrt{3}$; b) 64.
4. a) $-2\,099\,520x^3$; b) $126\sqrt[3]{a}$. **5.** a) $252\sqrt[3]{x^2}$; b) $1716a^3\sqrt[3]{a}\,b^2$, $-1716a^3b^2\sqrt[3]{b}$.
6. a) 15; b) 495. **7.** a) 5280; b) 5005. **8.** 10. **9.** 1120. **10.** a) 2772; b) 625; 7000; 7000; 1120; 16. **11.** a) $\frac{1}{2^{100}}C_{100}^{50}$; b) $\frac{4}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^{12}$; c) $\frac{2^{21}}{3^{77}}C_{105}^{28}$; d) $\sqrt{10}\cdot 50^3 C_{20}^{7}$.
12. a) 378; b) 17 550. **13.** a) $2^n-2(n+1)$; b) 0; c) 2^{2n-1}; d) 2^{2n-1}. **14.** a) 1; b) -1.

VII SKYRIUS

§ **28.** **1.** a) Bent vienas šūvis buvo sėkmingas; b) visi trys šūviai buvo sėkmingi; c) į taikinį pataikyta vienintelį kartą.

2. $B=A_1\cup(A_2\cap A_3)$, $\bar{B}=\bar{A}_1\cap(\bar{A}_2\cup\bar{A}_3)$.

3. $A\cup B=U$, t.y. įvykiai A ir B sudaro pilnąją įvykių aibę. Įvykiai A ir B nėra nesutaikomi.

5. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{3}$; c) 0; d) $\frac{5}{12}$.

6. $\frac{5}{36}$. **7.** $\frac{164}{1081}$. **8.** a) $\frac{9}{17}$; b) $\frac{8}{17}$.

§ **29.** **3.** a) 0,94; b) 0,38. **4.** $\frac{19}{30}$.

5. Negali. **6.** Negali.
7. A ir B priklausomi, B ir C priklausomi, A ir C nepriklausomi.
8. Poromis nepriklausomi, bet nėra kartu nepriklausomi.
9. 0,976. **10.** 0,819.
11. $P_1=p^3(2-p^3)$, $P_2=p^3(2-p)^3$, $P_2>P_1$, kai $0<p<1$.
12. $1-(1-p)^{12}$. **13.** Ne mažiau kaip 13 kartų.
14. $\frac{3}{5}$ ir $\frac{2}{5}$. **15.** 0,78. **16.** 0,014. **17.** 0,775. **18.** $\frac{10}{17}$. **19.** 0,998.
20. $\frac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}$. **21.** $\frac{2}{3}$. **22.** $\frac{2}{3}$.

§ **30.** **1.** $\approx 0{,}04$. **2.** $\approx 0{,}02$. **3.** $\frac{13}{16}$.

4. a) Tikimybė išlošti tris partijas iš keturių yra didesnė už tikimybę išlošti penkias partijas iš aštuonių; b) tikimybė išlošti ne mažiau kaip penkias partijas iš aštuonių yra didesnė už tikimybę išlošti ne mažiau kaip tris partijas iš keturių.

5. $\mathbf{P}_5(5) \approx 0{,}132$; $\mathbf{P}_5(4) = \mathbf{P}_5(3) \approx 0{,}329$; $\mathbf{P}_5(2) \approx 0{,}165$; $\mathbf{P}_5(1) \approx 0{,}041$; $\mathbf{P}_5(0) \approx$ $\approx 0{,}004$. **6.** 84.

7. Tikimybė yra viena ir ta pati, nes $C_{50}^{17}\left(\frac{1}{3}\right)^{17}\left(\frac{2}{3}\right)^{33} = C_{50}^{16}\left(\frac{1}{3}\right)^{16}\left(\frac{2}{3}\right)^{34}$.

8. 0,026.

§ 31. 1. a) gali; b) negali. **2.** 1 pavyzdyje nėra, 2 pavyzdyje yra.

3.

0	1	2	3
0,125	0,375	0,375	0,125

4.

1	4	9	16	25	36
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

5.

0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0,216	0,432	0,288	0,064

6. $\mathbf{M}X = 2{,}2$, $\mathbf{D}X = 0{,}76$. **7.** $\mathbf{M}X = 6$, $\mathbf{D}X = 9$.

8. a) $\mathbf{M}X = \frac{3}{2}$, $\mathbf{D}X = \frac{3}{4}$; b) $\mathbf{M}X = \frac{2}{5}$, $\mathbf{D}X = \frac{2}{25}$.

9. $\mathbf{M}X = \frac{91}{6}$. **10.** $\mathbf{M}X = \frac{4}{5}$, $\mathbf{D}X = \frac{9}{25}$.

11. $\mathbf{M}X = 100$, $\mathbf{D}X = 8$. **12.** $\mathbf{M}X = 4900$, $\mathbf{D}X = 98$.

13.

1	2	3	4
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

$\mathbf{M}X = \frac{40}{27}$, $\mathbf{D}X = \frac{452}{729}$.

14. Bilieto kaina neturi būti didesnė kaip 11 kapeikų, nes laimėjimo vidurkis $\approx 11{,}6$ kapeikos.

15. a) Nepelningas; b) pelningas; c) žaidimas nenuostolingas, nes laimėjimo vidurkis lygus nuliui.

§ 32. **1.** $x' = x\ln 2$; $x = C\cdot 2^t$. **2.** $x' = x\ln 0{,}99$; $x = C\cdot 0{,}99^t$.

3. $T = -\dfrac{\ln 2}{\ln 0{,}99}$. **4.** 3,9 kg. **5.** 56,5 g.

6. $y = 4e^x$. **7.** $\omega = \omega_0 e^{-kt}$. **8.** $T = 20 + 80\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/20}$; 60 min.

§ 33.**1.** a) taip; b) ne; c) ne. **2.** a) taip; b) taip; c) taip.

3. a) $\alpha = -2$; b) $\alpha = \dfrac{1}{2}$; c) $\alpha = 2$, $\alpha = -3$.

4. $A = 0$, α bet koks; $\alpha = -1$, A bet koks.

§ 34. **1.** $y = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C$. **2.** $y = \ln(1 - Ce^{-x})$.

3. $y = C(x-1) - 1$. **4.** $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$.

5. $y = e^{C\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$. **6.** $y = -\ln(C - e^x)$, $C > 0$. **7.** $y = C\cos x$.

8. $y = \ln(Cx^2 + C - 1)$. **9.** $y = C(1+x)^2$. **10.** $y = C(1+x)e^{-x}$.

11. $y = \mathrm{tg}\ln Cx$. **12.** $y = \dfrac{1}{27}(x+C)^3$, $y = 0$.

13. $y = \sin(x+C)$, $y = 1$, $y = -1$.

14. $y = (x^2 + C)^2 + 1$, $y = 1$.

15. $y = \dfrac{1}{1+Cx}$, $y = 0$. **16.** $y = \dfrac{2}{Ce^{-x^2} - 1}$, $y = 0$.

17. $y = \left(C + \dfrac{\sin 2x}{8} - \dfrac{x}{4}\right)^2$, $y = 0$. **18.** $x = \dfrac{3}{4}t^2$.

19. $x = \dfrac{1}{1-t}$. **20.** $x = -\sqrt{\dfrac{6+t^2}{1+t^2}}$.

21. a) $y = x$; b) $y = 0$. **22.** $y = \arcsin x - \dfrac{\pi}{4}$.

23. $y = Cx^2$; $y^2 = Cx$. **24.** $s = 25\cdot 2^{t/5}$.

25. $(1+y)e^{-y} = \ln\dfrac{1+e^x}{2} + 1 - x$.

26. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$, $y = 1$.

§ 35. **1.** $x = Ct^{-2} + \dfrac{1}{5}t^3$. **2.** $x = Ce^{-t^2} + 1$.

3. $x = C\cos t + \sin t$. **4.** $x = \left(C + \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{4}t^4\right)e^{t^2}$.

5. $x = \dfrac{Ct}{t^3+1} + \dfrac{1}{t}$. **6.** $x = t$. **7.** $x = \dfrac{t}{\cos t}$.

8. $x = 8\sin^2\dfrac{t}{2} + e^{1-\cos t}$. **9.** $x = \dfrac{3(t+1)^2 + (t+1)^4}{2}$.

10. $I = \dfrac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Nurodymas. Uždavinį reikia suvesti į lygties $L\dfrac{dI}{dt} + RI = V$ su pradine sąlyga $I(0) = 0$ integravimą.

11. $I=\frac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\sin\left(\omega t-\operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}\right)$. Nurodymas. Reikia ieškoti lygties $L\frac{dI}{dt}+RI=V\sin\omega t$ periodinio sprendinio.

§ 36. 1. $x=600(1-e^{-0{,}01t})$. Nurodymas. Uždavinį suvesti į lygties $mx''=-kx'$ su pradinėmis sąlygomis $x(0)=0$, $x'(0)=6$ integravimą.

2. $x=\frac{2kv_0+g}{4k^2}(1-e^{-2kt})-\frac{gt}{2k}$. Nurodymas. Reikia rasti lygties $mx''+ +2kmx'=-mg$ sprendinį, tenkinantį sąlygas $x(0)=0$, $x'(0)=v_0$.

3. $t=\frac{h(v_1-v_0)}{v_0 v_1 \ln\frac{v_1}{v_0}}$ c.

4. $mx''=t^2$; $x=\frac{1}{12m}t^4+C_1 t+C_2$.

5. $x=-\frac{1}{40}t^5+\frac{1}{4}t^2+C_1 t+C_2$. 6. $x=\frac{5}{12}t^4+\frac{1}{20}t^2+1$.

§ 37. 1. $x''+x=0$. 2. a) aprašo; b), c), d) neaprašo.

3. $x=a\left(1-\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t\right)$. Nurodymas. Uždavinį suvesti į lygties $lx''+gx=ag$ su pradinėmis sąlygomis $x(0)=x'(0)=0$ integravimą.

4. $x=\frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{\frac{g}{2l}}t}+e^{-\sqrt{\frac{g}{2l}}t}\right)$, $T=\sqrt{\frac{2l}{g}}\ln(2+\sqrt{3})$. Nurodymas. Koordinačių pradžia naudinga imti tašką, kuriame pradiniu momentu yra grandinėlės vidurys; tada x yra lygties $2lx''=gx$ su pradinėmis sąlygomis $x(0)=l$, $x'(0)=0$ sprendinys.

§ 38. 1. $x=C_1+C_2 e^{2t}$. 2. $x=C_1 e^{-2t}+C_2 e^{-3t}$.

3. $x=C_1 e^{2t}+C_2 e^{-\frac{4}{3}t}$. 4. $x=e^{-2t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$.

5. $x=e^{-\frac{t}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. 6. $x=e^{3t}(C_1+C_2 t)$.

7. $x=C_1 e^{-t}+C_2 e^{t}-2$. 8. $x=C_1+C_2 e^{-2t}+t$.

9. $x=C_1\sin 3t+C_2\cos 3t+1$. 10. $x=C_1 e^{-t}+C_2 e^{3t}+\frac{1}{5}e^{4t}$.

11. $x=C_1 e^{t}+C_2 e^{2t}+\frac{1}{10}(\sin t+3\cos t)$. 12. $x=C_1\sin t+C_2\cos t-2t\cos t$.

13. $x=e^{t}+e^{2t}$. 14. $x=e^{-t}(\sin 2t+\cos 2t)$. 15. $x=e^{-3t}(2+7t)$.

16. $x=ae^{-t}\cos t+(a+b)e^{-t}\sin t$. 17. $x=\frac{4}{5}e^{-2t}+\frac{8}{15}e^{3t}-\frac{1}{3}$.

18. $x=\frac{7}{27}e^{3t}-\frac{1}{27}e^{-3t}+\frac{1}{9}t-\frac{2}{9}$. 19. $x=2\sin 2t+\frac{1}{2}t\sin 2t$. 20. $\alpha=0$, $\beta>0$.

21. $\alpha=k^2$, k – sveikasis skaičius; $x=C\sin kt$, C – laisva konstanta.

IX SKYRIUS

§ 39. 1. a) -1; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{5}{9}$; d) $-\frac{1}{8}$; e) $\frac{7}{99}$.

2. a) diverguoja; b) diverguoja; c) diverguoja.

3. a) konverguoja; b) diverguoja; c) diverguoja; d) konverguoja; e) konverguoja; f) diverguoja.

4. a) konverguoja; b) konverguoja; c) konverguoja; d) konverguoja; e) konverguoja.

5. a) konverguoja reliatyviai; b) diverguoja; c) konverguoja absoliučiai; d) konverguoja reliatyviai; e) konverguoja reliatyviai; f) konverguoja absoliučiai.

§ **40. 1.** a) $R=2$; b) $R=2$; c) $R=\sqrt[3]{3}$; d) $R=+\infty$; e) $R=0$.

2. a) $|z-1|<3$; b) $|z+i|<2$; c) $|z+1-i|<\sqrt{2}$; d) visa kompleksinė plokštuma.

3. a) $]-1;\ 1\ [$; b) $]-1;\ 1\ [$; c) $[-2;\ 2\ [$; d) $]-e;\ e\ [$; e) $[-1;\ 1\ [$; f) R.

§ **41. 1,** a) $\ln\cos x=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^7}{12}+\ldots$; b) $\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{3}+\ldots$; c) $\operatorname{tg}x=$ $=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots$ **2.** a) 0,006; b) 0,07.

3. a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$, $R=+\infty$, b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{2^n n!}x^n$, $R=+\infty$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n2^{4n-1}}$, $R=4$; d) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$, $R=+\infty$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{2}x^n$, $R=1$; f) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}$, $R=1$; g) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$, $R=1$; h) $-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\right)x^n$, $R=1$; i) $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{11}{2^{n+1}}-\frac{2}{3^{n-1}}\right)x^n$, $R=2$.

4. a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, $R=1$; b) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=1$; c) $\frac{\pi}{2}-x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^n\cdot n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=1$; d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}$, $R=1$; e) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=+\infty$; f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}x^{2n+1}$, $R=+\infty$; g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}x^n$, $R=1$.

GRAIKŲ ABĖCĖLĖ

Α α Alfa	Ε ε Epsilon	Ι ι Jota	Ν ν Niu	Ρ ρ Ro	Φ φ Fi
Β β Beta	Ζ ζ Dzeta	Κ ϰ Kapa	Ξ ξ Ksi	Σ σ Sigma	Χ χ Chi
Γ γ Gama	Η η Eta	Λ λ Liambda	Ο ο Omikron	Τ τ Tau	Ψ ψ Psi
Δ δ Delta	Θ θ Teta	Μ μ Miu	Π π Pi	Υ υ Ipsilon	Ω ω Omega

Al-103 **Algebra ir analizės pradmenys**: Vadovėlis spec. vid. m-kloms / Rus. leid. red. G. Jakovlevas.— V.: Mokslas, 1979.— .— (Matematika technikumams).

D. 2. / M. Kačenovskis, J. Koliaginas, A. Kutasovas ir kt. 1980. 272 p., brėž.

Vadovėlyje dėstoma tiesinių lygčių sistemų, antrosios, trečiosios eilės determinantų ir kompleksinių skaičių teorija, paprasčiausi integravimo metodai, taip pat kombinatorikos ir tikimybių teorijos elementai, nagrinėjamos pirmosios ir antrosios eilės diferencialinės lygtys, gvildenami bakterijų dauginimosi, radioaktyviojo skilimo ir harmoninių svyravimų uždaviniai ir kt.

1702000000

A $\frac{20203-018}{M\ 854(08)-80}$ 43—80 512(075)

Мечислав Игнатьевич Каченовский, Юрий Михайлович Колягин, Александр Дмитриевич Кутасов, Геннадий Лаврович Луканкин, Вачаган Арташесович Оганесян, Геннадий Николаевич Яковлев. АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА. ЧАСТЬ 2. На литовском языке. Перевел с русского издания 1978 г. Эдвардас Владович Мисявичюс. Вильнюс, Мокслас, 1980.

Mečislovas Kačenovskis, Jurijus Koliaginas, Aleksandras Kutasovas, Genadijus Lukankinas, Vačaganas Oganesianas, Genadijus Jakovlevas. ALGEBRA IR ANALIZĖS PRADMENYS. 2 DALIS. Vertė Edvardas Misevičius. Redaktorė E. Petrėnaitė. Viršelio dailininkė L. Tulytė. Meninis redaktorius A. Žvilius. Techninė redaktorė A. Plauškienė. Korektorės: Z. Marys, V. Ašmontienė.

IB Nr. 1276.

Duota rinkti 1979.06.11. Pasirašyta spaudai 1980.03.26. Formatas $60\times90^1/_{16}$. Popierius — spaudos Nr. 2. Šriftas — 10 p. romaniškas. Spauda — iškilioji. 17 sp. l., 18,09 apsk. l. l. Tiražas 20 000 egz. Užsakymo Nr. 755. Kaina 0,70 rb. „Mokslas", Vilnius, Žvaigždžių g. 23. Spausdino K. Poželos spaustuvė, Kaunas, Gedimino g. 10.